

Ejercicios 3 del curso "Álgebras de Conglomerado"

Lara Bossinger

semestre 2022-1

4. La clasificación de tipo finito

4.5. Tipo C

Lema 4.34. Sea Q un carcaj con una acción de un grupo finito G tal que Q es globalmente plegable. Sea Q' un carcaj que se obtiene de Q agregando vértices congelados y flechas entre los vértices nuevos y los vértices mutables de Q . Extendimos la acción de G a Q' tal que cada vértice nuevo es fijo bajo la acción.

Entonces, también Q' es globalmente plegable con respecto a la acción de G .

Corolario 4.35. Sea Q un carcaj sin vértices congelados y globalmente plegable con respecto a la acción de un grupo finito G . Supongamos que cada patrón de semillas con matriz de intercambio inicial $B(Q)$ (independientemente de las direcciones congeladas) es de tipo finito.

Entonces cada patrón de semillas con matriz de intercambio inicial $B(Q)^G$ es de tipo finito.

Ejercicio 4.8. Pruebe el Lema 4.34 y el Corolario 4.35.

En el carcaj $Q(T_0)$ etiquetamos los vértices que corresponden a arcos $\overline{i, n+1}$ como i y a los vértices en la misma órbita bajo la simetría central como i' , como en la Figura ???. El carcaj $Q(T_0)$ es una orientación del diagrama de Dynkin de tipo A_{2n+2} con vértices (en orden) $n', \dots, 3', 2', 1, 2, 3, \dots, n$ y flechas orientadas al vértice central 1.

Sea $G = \mathbb{Z}_2$ actuando en $Q(T_0)$ de tal manera que intercambia los vértices i y i' para $i \in [2, n]$ y que fija 1.

Ejercicio 4.9. Verifica que $Q(T_0)$ es G -admisibles y que la matriz de intercambio plegada $B(Q(T_0))^G$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

4.6. Enumeración y tipo 2-finito

Ejercicio 4.10. Prueba que los patrones de semillas de tipo \mathbf{C}_n tienen $\binom{2n}{n}$ semillas y $n(n+1)$ variables de conglomerado usando el modelo geométrico de la sección §4.5.

Ejercicio 4.11. Sean B y B' dos matrices de intercambio tal que sus compañeras de Cartan $A(B)$ y $A(B')$ corresponden al mismo diagrama de Dynkin no simplemente lazado. Entonces, B y B' son equivalentes bajo mutación.

Ejercicio 4.12. En este ejercicio tratamos el caso de un álgebra de conglomerado de tipo descomponible. Para un diagrama de Dynkin \mathbf{X}_n sea $s(\mathbf{X}_n)$ el número de semillas de un álgebra de conglomerado de tipo \mathbf{X}_n y sea $vc(\mathbf{X}_n)$ el número de las variables de conglomerado.

Pruebe las siguientes afirmaciones.

1. Si \mathcal{A} es un álgebra de conglomerado de tipo $\mathbf{X}_n \sqcup \mathbf{Y}_{n'}$, entonces el número de las variables de conglomerado de \mathcal{A} es $vc(\mathbf{X}_n) + vc(\mathbf{Y}_{n'})$ y el número de semillas de \mathcal{A} es $s(\mathbf{X}_n) \cdot s(\mathbf{Y}_{n'})$.
2. Si la compañera de Cartan de una matriz de intercambio es de tipo finito (posiblemente descomponible) entonces el patrón de semillas es de tipo finito. *Tipp: Puedes usar el hecho que cada patrón de semillas de tipo \mathbf{X}_n es de tipo finito donde \mathbf{X}_n es un diagrama de Dynkin conexo.*
3. Si B y B' son matrices de intercambio y $A(B)$ y $A(B')$ son sus compañeras de Cartan de tipo finito (posiblemente descomponibles), entonces $A(B)$ y $A(B')$ son del mismo tipo si y solo si B y B' son equivalentes bajo mutación.

Ejercicio 4.13. El diagrama $\Gamma' := \Gamma(\mu_k(B))$ se determina de manera única del diagrama $\Gamma(B)$ y la dirección mutable k . Más precisamente Γ' se obtiene de Γ en los siguientes pasos:

1. la orientación de las flechas adyacentes a k se invierta y se quedan con los mismos pesos;
2. para cada camino $i \xrightarrow{a} k \xrightarrow{b} j$ distinguimos dos casos (ambos incluyen el caso que no existen flechas entre i y j):
 - si existe una flecha $i \xrightarrow{c} j$: en este caso en Γ' tenemos

$$\begin{array}{ccc}
 & k & \\
 \begin{array}{c} a \\ \swarrow \end{array} & & \begin{array}{c} b \\ \nwarrow \end{array} \\
 i & \xrightarrow{c'} & j
 \end{array}
 \quad \text{donde } c' = (\sqrt{ab} + \sqrt{c})^2;$$

- si existe una flecha $i \xleftarrow{c} j$: en este caso en Γ' tenemos

$$\begin{array}{ccc}
 & k & \\
 \begin{array}{c} a \\ \swarrow \end{array} & & \begin{array}{c} b \\ \nwarrow \end{array} \\
 i & \xleftarrow{c'} & j
 \end{array}
 \quad \text{donde } c' = (\sqrt{ab} - \sqrt{c})^2;$$

3. todos los demás flechas se quedan iguales.

Tipp: considera la matriz casi-simétrica $S(B) = (s_{ij})$ asociada con B con entradas $s_{ij} := \text{sgn}(b_{ij})\sqrt{b_{ij}b_{ji}}$ y prueba que $\mu_k(S(B)) = S(\mu_k(B))$.

4.6.1. Los Árboles

Ejercicio 4.14. Si B es una matriz 2-finita entonces para todas las i, j, k distintas tenemos

$$b_{ij}b_{jk}b_{ki} = -b_{ji}b_{kj}b_{ik}.$$

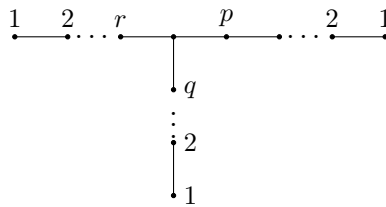
Además los pesos de triángulos en $\Gamma(B)$ son $\{1, 1, 1\}$ o $\{2, 2, 1\}$. *Tipp: Sin perder de generalidad puedes suponer que B es una matriz 3×3 .*

4.6.2. Los Ciclos

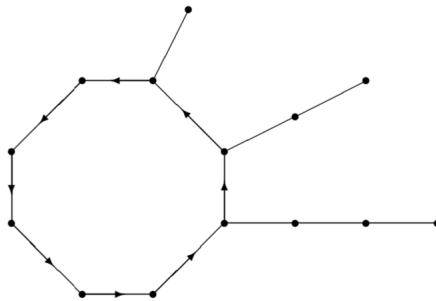
Ejercicio 4.15. Muestra que en el último caso de la prueba de la Proposición 4.45 tenemos $\Gamma \sim F_4$.

4.6.3. Ejercicios

Ejercicio 4.16. Sean $p, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $T_{p,q,r}$ la gráfica con $p + q + r + 1$ vértices que se forma de tres cadenas de grafías de tipo A_{r+1}, A_{p+1} y A_{q+1} plegadas en un vértice:



Sean $p, q, r \in \mathbb{Z}_{>0}$ y $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Definimos el diagrama $S_{r,p,q}^s$ con $p + q + r + s$ vértices que consiste de un $s + 3$ -ciclo orientado y tres grafías de tipo A_{r-1}, A_{p-1} y A_{q-1} plegadas a tres vértices consecutivos del ciclo. Por ejemplo, $S_{4,3,2}^5$ es



Todos los pesos en las flechas son uno y las orientaciones de las aristas en los subdiagramas de tipo A son arbitrarias.

Muestra que el diagrama $S_{r,p,q}^s$ es equivalente bajo mutación a un diagrama de tipo $T_{p+r-1,q,s}$.

5. Coeficientes

5.1. Semicampos

Ejercicio 5.1. La adición auxiliar del semicampo tropical como definida en (5.1) es conmutativa, asociativa y distributiva con respecto a la multiplicación usual, es decir: $(p \oplus q)r = pr \oplus qr$. En particular, $\text{Trop}(y_1, \dots, y_n)$ es un semicampo.

Ejercicio 5.2. Muestra que $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ es un dominio integral para cualquier \mathbb{P} .

Ejercicio 5.3. Prueba el Lema 5.5. En particular, muestra que cada identidad en el semicampo universal es válida en cualquier otro semicampo.

5.2. Y-patrones y álgebras de conglomerado con coeficientes

Ejercicio 5.4. Muestra que la mutación de Y -semillas es una involución.

Ejercicio 5.5. La condición normalizando junto con la mutación de Y -semillas determina de manera única las tuplas $\mathbf{p}(t) = (p_{1;t}^+, p_{1;t}^-, \dots, p_{n;t}^+, p_{n;t}^-)$ con $p_{k;t}^+ := \frac{y_{k;t}}{y_{k;t} \oplus 1}$ y $p_{k;t}^- := \frac{1}{y_{k;t} \oplus 1}$.

5.2.1. Ejercicios

Ejercicio 5.6. Prueba la Proposición 5.19, es decir prueba que para cada generador p_j de \mathbb{P} y cada variable de conglomerado z que z es un polinomio en p_j . *Tipp: usa inducción sobre la distancia entre una semilla que contiene la variable z y la semilla inicial como en la prueba del Teorema 3.1.*

Ejercicio 5.7. Sean $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1$ cuatro puntos en la línea proyectiva. Entonces, $P_i = [a_i : b_i]$ en coordenadas proyectivas. Definimos

$$Y(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{P_{14}P_{23}}{P_{12}P_{34}}$$

donde $P_{ij} := \det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$. Nota que Y está relacionada a la razón cruzada convencional bajo $Y(P_1, P_2, P_3, P_4) = -(P_1, P_3; P_4, P_2)$. La razón cruzada es una invariante de cuatro puntos colineales y se puede generalizar para n -tuplas de puntos P_1, \dots, P_n en \mathbb{P}^1 .

1. Dado seis puntos $P_1, \dots, P_6 \in \mathbb{P}^1$ calcula las razones cruzadas $Y(P_1, P_i, P_{i+1}, P_{i+2})$ con $i \in \{2, 3, 4\}$ en términos de las razones cruzadas $Y(P_j, P_{j+1}, P_{j+2}, P_6)$ con $j \in \{1, 2, 3\}$.
2. Dado una triangulación del n -ágono T sea B_T la matriz de intercambio (no extendida) del carcaj Q_T (Definición 2.7). Cada arco $d \in T$ es la diagonal de un cuadrilátero con vértices i, j, k, l . Definimos $Y_d := Y(P_i, P_j, P_k, P_l)$. Sea $Y_T := (Y_d : d \in T)$.
Muestra que (Y_T, B_T) es un Y -patrón.
3. Concluye que para saber los $\binom{n}{4}$ razones cruzadas de $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{P}^1$ es suficiente calcular $n - 3$ de ellas.

5.3. Formulas de separación

Ejercicio 5.8. Prueba la Proposición 5.24 usando la Proposición 5.19.

5.3.1. Ejercicios

Ejercicio 5.9. Sea $t \in \mathbb{T}_n$ y $j \in [n]$.

1. Prueba que

$$Y_{j;t} = Y_{j;t}|_{\text{Trop}(y_1, \dots, y_n)} \prod_{i=1}^n F_{i;t}^{b_{ij}^t} \quad (2)$$

donde $B(t) = (b_{ij}^t)_{i,j \in [n]}$ es la matriz de intercambio en t .

2. Prueba que si $b_{ij}^t \geq 0$ para todas las $i \in [n]$, entonces $Y_{j;t}$ es un polinomio de Laurent en los coeficientes iniciales y_1, \dots, y_n .