Escuela de Invierno 2023
Proyecto: Positividad total

Investigadores: Lara Bossinger y Alfredo Nájera Chávez

Áreas de conocimiento: Álgebra lineal, combinatoria
Áreas opcionales: álgebra moderna, geometría y topología algebraica

Resumen

Una matriz se llama totalmente positiva (resp., totalmente no negativa) si todos sus menores (determinantes de submatrices quadradas) son positivos (resp., no negativos). Esta clase de matrices surge y juega un papel importante en varios dominios de las matemáticas, tales como: la teoría de la representación, las álgebras de racimos, la combinatoria, la probabilidad y los procesos estocásticos, la física matemática, por nombrar sólo algunos. El objetivo de este proyecto es proporcionar una introducción a la positividad total, haciendo énfasis en los aspectos algebraicos, combinatorios y geométricos sobre este tema.

Historia y Actualidad

Las origenes del tema originalmente vienen mucho del la de análisys. Entre los primeros que se dedicaron al estudio de matrices totalmente positivos fue I. J. Schoenberg quien se interesó por el problema de la estimación del número de ceros reales de un polinomio. Lo cual le llevó a sus trabajos sobre las transformaciones de variación decreciente (a principios de los años 30) y las secuencias, funciones y secuencias de frecuencia Pólya (a finales de los años 40 y principios de los 50). Estos, junto con su trabajo sobre splines (años 60 y 70), son temas centrales en la teoría de la positividad total. M. G. Krein llegó a la teoría de la positividad total a través de las ecuaciones diferenciales ordinarias cuyas funciones de Green son totalmente positivas (mediados de los años 30). S. Karlin llegó a la teoría de la positividad total (en los años 50 y 60) a través de la estadística, la teoría de la fiabilidad y la economía matemática.

Más recientemente (a partir de los años 90) el estudio de las matrices totalmente positivos se enfocó en preguntas de parametrizar el conjunto de las matrices totalmente positivas y en proporcionar pruebas eficaces para certificar la positividad de una matriz. Como en muchos aspectos de matemáticas, este cambio de punto de vista a las matrices totalmente positivas fue muy fructífero en el sentido que se abrieron nuevos campos de investigación. A partir del trabajo de Fomin y Zelevinsky, los aspectos combinatorios y algebraicos (incluyendo la geometría algebraica) se volvieron centrales en el tema. Nuestro enfoque se encuentra en esta visión más moderna al tema, donde las permutaciones, las redes planas (ciertas gráficas dirigidas planas) y las Grassmannianas juegan un papel importante.

Temas

Más precisamente se ofrecen tres temas en las cuales las y los estudiantes van a trabajar de manera individual o grupal. Se admiten hasta 2 estudiantes en cada tema. **En la solicitud se debe indicar el tema seleccionado o el orden de preferencia.**

1. **Propiedades básicas de matrices totalmente positivas** basado en §1 de [Pin]. Este tema hace enfasis el la parte del álgebra lineal, elaborando identidades entre menores de matrices como son el teorema de Cauchy–Binet, la formula de determianates de Sylvester y la expansión de Laplace. Los únicos requisitos de este tema son conocimientos básicos en álgebra lineal.

2. **Certificados de positividad total** basado en §2 de [Pin] o [FZ]. Este tema se enfoca en dar criterios para la positividad total de una matriz los cuales requieren resultados como la descomposición de las matrices en matrices triangulares superiores, diagonales y triangular inferiores. El tema se puede estudiar exclusivamente del punto de viste del álgebra lineal pero también ofrece la posibilidad de explorar conexiones con el grupo simétrico y la teoría de representaciones los cuales requieren conocimientos previos de álgebra moderna.

3. **Objetos combinatorios asociados: redes planas y caminos** basado en [FZ] o §4,5,6 de [Pos]. En este tema se estudian los objetos combinatorios que fueron introducidos para parametrizar las matrices totalmente positivas como son redes planas (gráficas orientadas planas) y caminos en ellas. Este tema se puede analizar solamente del punto de vista de la combinatoria de las gráficas orientados, pero también ofrece la posibilidad de acercarse a temas de la geometría o topología algebraica a traves de las variedades Grassmannianas y de Schubert o sus composiciones en células.

Bibliografía

[FZ] Fomin, S. y Zelevinsky, A. *Total positivity: tests and parametrizations*, Math. Intelligencer 22 (2000)
[Pin] Pinkus, A. *Totally Positive Matrices*, Cambridge University Press (2009)
[Pos] Postnikov, A. *Total Positivity, Grassmannians, and networks*, http://math.mit.edu/ apost/papers/tpgrass.pdf.

Opcionales para explorar antes del curso:

Mark Skandera. Introduction to Total Poisitity:
https://people.brandeis.edu/ aminul/Docs/ira/ISING/intp+ve.pdf

Ivan Ip. Lecture 2: Total Positivity:
https://www.math.hkust.edu.hk/ ivanip/teaching/cluster/Lecture2-TotalPositivity.pdf

Productos esperados

Las y los estudiantes deben presentar un producto final que puede ser en forma de en ensallo (mini-artículo), una presentación (diapositivas) o un poster.

Máximo de participantes

Se aceptarán hasta 2 estudiantes por tema (un total de hasta 6 estudiantes) por lo cual es necesario que las y los aspirantes indiquen el tema que quieren trabajar o el orden de preferencia.