

Positividad total y álgebras de conglomerado

Alfredo Nájera Chávez

CONACYT-UNAM

Octava Escuela Oaxaqueña de Matemáticas

Ideas centrales en geometría algebraica

- ▶ Una **variedad algebraica** es el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones polinomiales en varias variables (ejemplo: un círculo de radio r es el conjunto de soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$).

- ▶ Una **variedad algebraica** es el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones polinomiales en varias variables (ejemplo: un círculo de radio r es el conjunto de soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$).
- ▶ La teoría se comporta mucho mejor si trabajamos con polinomios con coeficientes en un campo algebraicamente cerrado, hoy el campo es \mathbb{C} .

- ▶ Una **variedad algebraica** es el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones polinomiales en varias variables (ejemplo: un círculo de radio r es el conjunto de soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$).
- ▶ La teoría se comporta mucho mejor si trabajamos con polinomios con coeficientes en un campo algebraicamente cerrado, hoy el campo es \mathbb{C} .
- ▶ Si V es el conjunto de ceros de $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ entonces el **anillo de coordenadas** de V es

$$\mathbb{C}[V] := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / \langle f_1, \dots, f_s \rangle$$

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \{g_1 f_1 + \dots + g_s f_s \mid g_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\}$$

Ejemplo

$SL_n(\mathbb{C})$ es una variedad algebraica. Si consideramos el anillo de polinomios $\mathbb{C}[x_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n]$ y \det_n es el polinomio determinante, es decir,

$$\det_n = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i, \sigma(i)},$$

entonces $SL_n(\mathbb{C})$ es el conjunto de soluciones de la ecuación

$$\det_n - 1 = 0.$$

Por ejemplo, $SL_2(\mathbb{C})$ es el conjunto de soluciones de

$$x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} - 1 = 0$$

y

$$\mathbb{C}[SL_2(\mathbb{C})] = \mathbb{C}[x_{11}, \dots, x_{22}] / \langle x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} - 1 \rangle.$$

Positividad total a la Lusztig

Positividad total clásica para $SL_n(\mathbb{C})$

Sea G la variedad algebraica $SL_n(\mathbb{C})$. Entonces

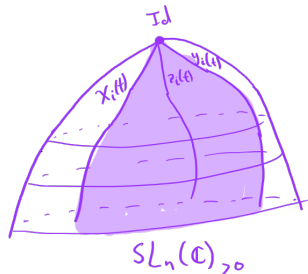
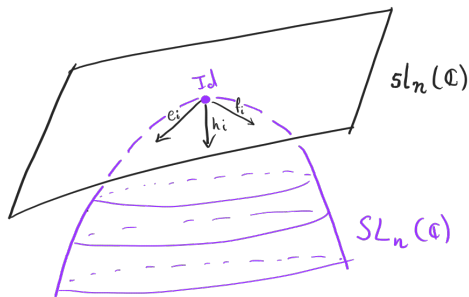
$$G_{>0} = \{g \in G \mid f(g) \in \mathbb{R}_{>0} \text{ para toda } f \in \Delta\},$$

dónde $\Delta \subset \mathbb{C}[G]$ es el conjunto de todos los menores.

Usando varios resultados (el lemma de Cryer, el teorema de Binet-Cauchy y el teorema de Loewner-Whitney) se obtiene una descripción equivalente de $G_{>0}$.

$G_{>0}$ = monoide multiplicativo generado por las matrices diagonales con entradas en $\mathbb{R}_{>0}$ y matrices de la forma $x_i(t), y_i(t)$ con $t \in \mathbb{R}_{>0}$.

Conceptualmente, en la descripción de monoide de $SL_n(\mathbb{C})_{>0}$, sus generadores están *inducidos* por los generadores de Chevalley del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.



$SL_n(\mathbb{C})$ es un ejemplo de un grupo de Lie simple. Los grupos de Lie simples están clasificados y *algunos* de ellos son:

- ▶ $SU(n)$ el grupo de matrices unitarias con determinante 1
- ▶ $PU(n)$ el cociente de $SU(n)$ por la acción escalar
- ▶ $SO(n)$ el grupo de matrices ortogonales con determinante 1
- ▶ $Sp(n)$ el grupo de matrices simplécticas

Todos los ejemplos de anteriores son parte de la familia aún más grande de los **grupos reductivos**.

Tarea: Checar las páginas de Wikipedia sobre

- ▶ [Simple Lie groups](#)
- ▶ [Reductive groups](#)

La descripción de monoide de $SL_n(\mathbb{C})_{>0}$ motivó a Lusztig para definir la parte totalmente positiva de un grupo reductivo G .

$G_{>0}$ = monoide generado por los elementos en G inducidos por los generadores de Chevalley del álgebra de Lie de G .

Lusztig demuestra que $G_{>0}$ tiene una descripción equivalente dada por

$$G_{>0} = \{p \in G : f(p) \in \mathbb{R}_{>0} \text{ para toda } f \in \mathbb{B}_1\},$$

dónde \mathbb{B}_1 es una base distinguida del \mathbb{C} -espacio vectorial $\mathbb{C}[G]$ llamada es la **base dual canónica** en \mathbb{B}_q en $q = 1$.

\mathbb{B}_q es una base como \mathbb{C} -espacio vectorial para un grupo cuántico asociado al álgebra de Lie de G .

Tarea: Checar la sección *Representation theory* de [esta página](#).

- ▶ La descripción por medio \mathbb{B}_1 se usa para demostrar propiedades fundamentales de $G_{>0}$.
- ▶ \mathbb{B}_1 es un conjunto infinito y en general su estudio es muy complicado pues se necesitan herramientas geométricas y algebraicas muy avanzadas para construirlo.
- ▶ Las bases canónicas para grupos cuánticos fueron inicialmente desarrolladas por Lusztig y Kashiwara. En 2018 Kashiwara recibe la medalla Chern por *“For his outstanding and foundational contributions to algebraic analysis and representation theory sustained over a period of almost 50 years.”* En su [Chern medal lecture](#) decide hablar sobre interacciones de \mathbb{B}_0 y \mathbb{B}_q .
- ▶ El trabajo de Lusztig dio lugar a una línea de investigación muy robusta.

Variedades totalmente positivas

Más generalmente, sea V una variedad algebraica sobre \mathbb{C} . Supongamos que tenemos una colección de funciones “importantes”

$$\Delta \subset \mathbb{C}[V].$$

Podemos definir **parte totalmente positiva de V** es

$$V_{>0} = \{p \in V : f(p) \in \mathbb{R}_{>0} \text{ para toda } f \in \Delta\}$$

Todos los ejemplos anteriores pueden describirse de esta manera. La base dual canónica \mathbb{B}_1 para $\mathbb{C}[SL_n(\mathbb{C})]$ **no** es el conjunto de menores Δ . En general se puede probar que

$$\Delta \subsetneq \mathbb{B}_1$$

pero Δ da un certificado de positividad para \mathbb{B}_1 , es decir,

$$f(p) > 0 \text{ para toda } f \in \mathbb{B}_1 \iff f(p) > 0 \text{ para toda } f \in \Delta.$$

La **Grassmanniana** de subespacios de dimensión k de \mathbb{C}^n es

$\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) := \{V \subset \mathbb{C}^n \mid V \text{ es un subespacio vectorial de dimensión } k\}$.

Grassmann demostró en el siglo XIX que $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ es una variedad algebraica (projectiva). Por simplicidad hoy $k = 2$.

Un punto en $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ puede ser representado por una matriz rectangular:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & z_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & z_{22} & \cdots & x_{2n} \end{bmatrix}$$

Las coordenadas de Plücker de $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ son las funciones

$$P_{ij} = \det \begin{bmatrix} z_{1i} & z_{1j} \\ z_{2i} & z_{2j} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}[\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)].$$

Podemos tomar $\Delta = \{P_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ para definir la Grassmanniana totalmente positiva

$$\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)_{>0} = \{p \in \text{Gr}_2(\mathbb{C}^n) \mid f(p) \in \mathbb{R}_{>0} \text{ para toda } f \in \Delta\}.$$

Positividad total

Marcela Guadalupe Mercado Flores

Sexta Escuela de Invierno de Matemáticas en Oaxaca - Virtual -

Asesor: Dr. Alfredo Nájera Chávez

Bibliografía: Fomin, S., Williams, L. y Zelevinsky, A. (2017). Introducción a las álgebras de conglomerados. preimpresión de arXiv arXiv: 1707.07190. capítulos 1 y 6.



1. Matrices positivas

- Sea $M \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Un **menor** de tamaño r de M es el determinante de una sub-matriz cuadrada de M de tamaño $r \times r$.
- Una matriz M de tamaño $n \times m$ es **totalmente positiva** (TP) si todos sus menores son reales positivos.

2. ¿Cuántos menores son?

Y entonces, la pregunta es ¿Cuántos menores tiene una matriz cuadrada $M \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$?

$$1 \times 1 = n^2$$

$$2 \times 2 = \binom{n}{2}^2$$

$$3 \times 3 = \binom{n}{3}^2$$

⋮

$$n \times n = \binom{n}{n}^2 = 1$$

$$\binom{2n}{n} - 1 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}^2 \geq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n - 1$$

3. Matrices de $2 \times n$

Por simplicidad comencemos con el caso $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Así, solo hay menores de 1×1 y 2×2 , lo que nos deja con

$$2n + \binom{n}{2} = 2n + \frac{n(n-1)}{2}$$

menores por calcular.

4. Afirmación

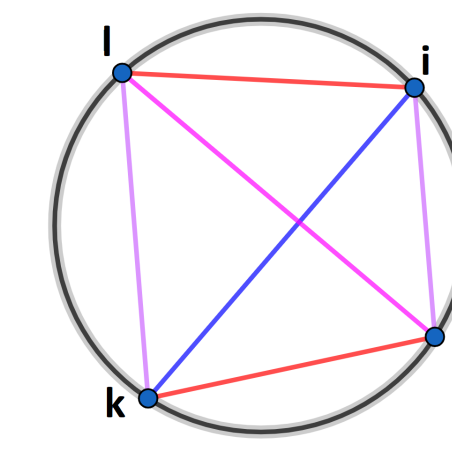
Existe una colección de $2n - 3$ menores que podemos calcular para asegurar que todos los menores son positivos.

Notación Sean $1 \leq i < j \leq n$ el menor de 2×2 asociado a las columnas i, j es

$$P_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}$$

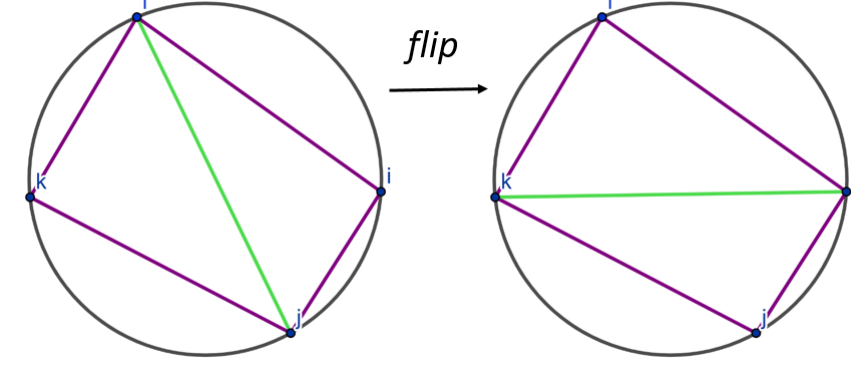
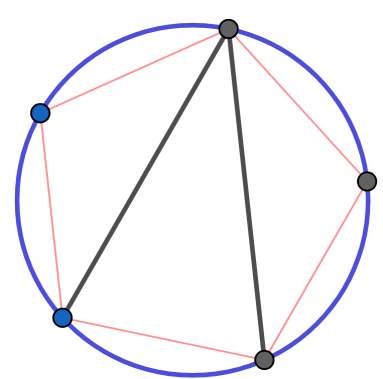
5. Relaciones entre los menores

Relaciones de Grassmann-Plücker. Sean $1 \leq i < j < k < l \leq n$ enteros. Entonces $P_{ik}P_{jl} = P_{ij}P_{kl} + P_{il}P_{jk}$



6. Triangulaciones

- Sean Δ_n un n -ágono e \overline{ij} el arco en Δ_n que une al vértice i con el j . Una **triangulación** de Δ_n es una colección maximal de arcos que no se intersectan en el interior de Δ_n
- Sean T una triangulación en Δ_n e \overline{ij} un arco interior de Δ_n . $\exists ijkl$ un cuadrilátero que tiene a \overline{ij} como diagonal \Rightarrow el **flip** de \overline{ij} en $ijkl$ es la diagonal \overline{kl}



$$\{\overline{12}, \overline{23}, \overline{34}, \overline{45}, \overline{15}, \overline{14}, \overline{13}\}$$

Toda triangulación de Δ_n tiene $2n - 3$ arcos

7. Correspondencia biyectiva.

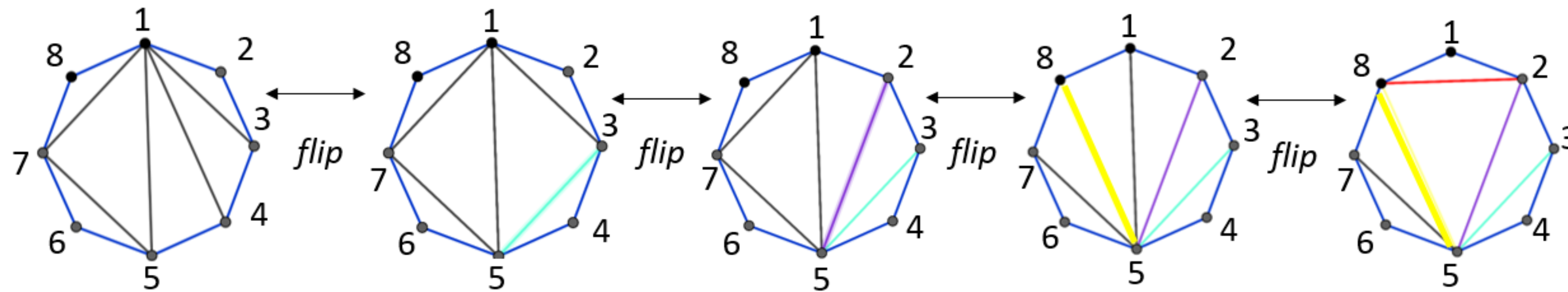
Teorema. Sea T una triangulación de Δ_n . Entonces si $P_{ij} > 0$ para todo $\overline{ij} \in T$ entonces $P_{ij} > 0 \forall 1 \leq i < j \leq n$. Usando la relación de Grassmann-Plücker

$$P_{jl} = \frac{P_{ij}P_{kl} + P_{il}P_{jk}}{P_{ik}}$$

Sí, todos los menores del lado derecho son positivos $P_{jl} > 0$, además, todas las triangulaciones están conectadas mediante *flip* iterados. Por lo anterior, al iterar este proceso, se demuestra este teorema.

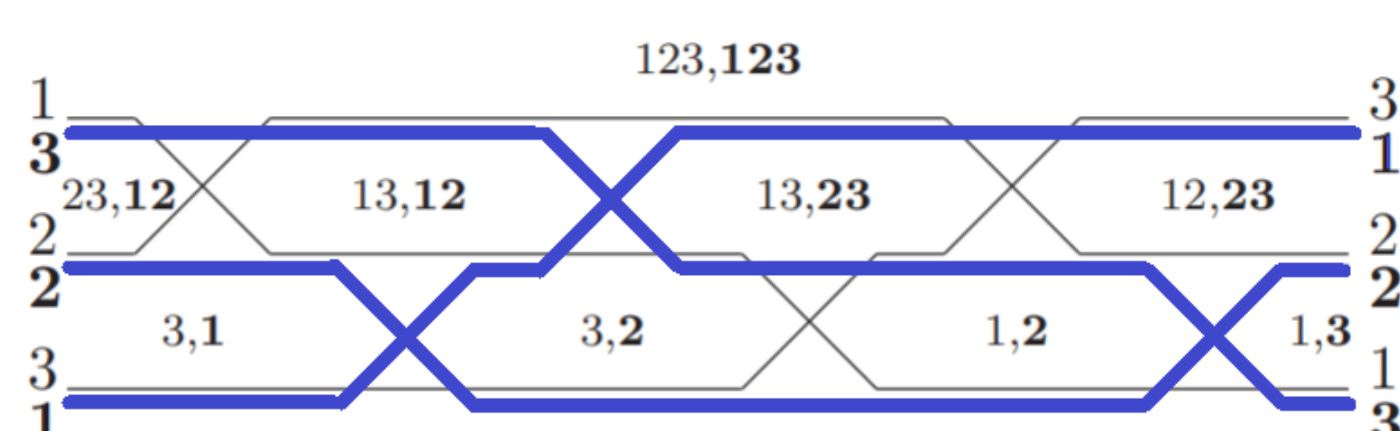
8. Caso en que $n = 8$

Tenemos $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2 \cdot 6!} = 28$ menores de 2×2 y $2n - 3 = 13$ arcos en cualquier triangulación de un octágono. Pero ¿Qué pasa si queremos saber si un menor es positivo por ejemplo P_{28} y no lo incluye nuestra triangulación que sabemos que es positiva? Pues como ya mencionamos podemos llegar mediante una serie de flips iterados que por la relación de grassmann-plucker podemos concluir que P_{28} es positivo.



9. ¿Y para una matriz de $n \times n$?

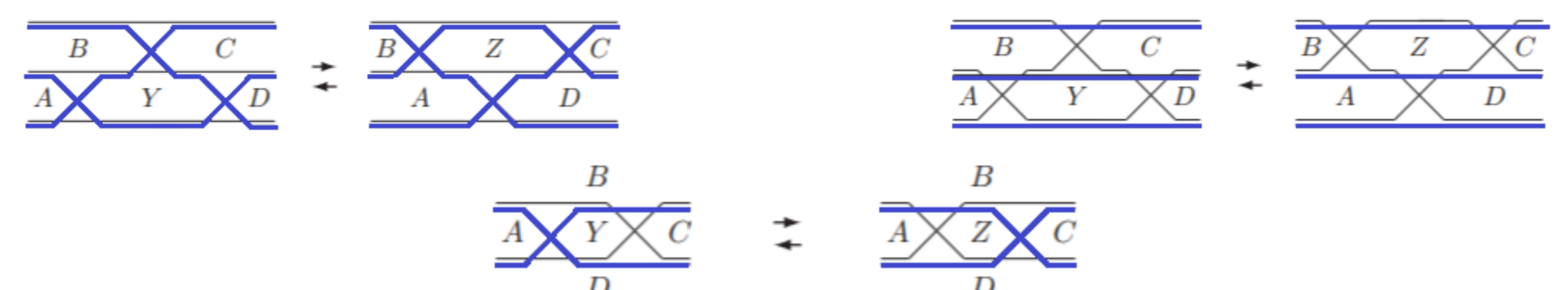
Denotamos $P_{I,J}$ el menor correspondiente al conjunto de filas I y columnas J . Un **diagrama de cableado doble** consta de dos familias de n líneas etiquetadas como $1, \dots, n$ como se muestra en la siguiente figura. El requisito clave es que cada par de líneas se cruzan exactamente una vez:



Este diagrama de cableado doble tiene $3^2 = 9$ cámaras menores: $P_{3,1}, P_{3,2}, P_{1,2}, P_{23,12}, P_{13,12}, P_{13,23}, P_{12,23}, P_{123,123}$. El número total de menores de cámara es siempre n^2 .

10. Movimientos

- Cada menor $P_{I,J}$ es un menor de cámara para algún diagrama de cableado doble.
- Dos diagramas de cableado doble se relacionan entre sí mediante una secuencia de movimientos locales de tres tipos.
- Bajo cada movimiento local, las colecciones correspondientes de menores de cámara se transforman intercambiando los menores Y y Z , y estos menores satisfacen la identidad $YZ = AC + BD$.



Álgebras de conglomerado

¿Qué son las álgebra de conglomerado (cluster algebras)?

Una clase de álgebras conmutativas equipadas con un conjunto de generadores distinguido. Dichos generadores deben cumplir ciertos axiomas de naturaleza combinatoria.

Definidas en el año 2001 por Fomin y Zelevinsky

Motivación: proponer un enfoque algebraico/combinatorio que unifique y simplifique el estudio de las variedades totalmente positivas, las bases canónicas de grupos cuánticos y la interacción de todas estas teorías.

Carcajes

En matemáticas, **carcaj** es un sinónimo de gráfica dirigida.

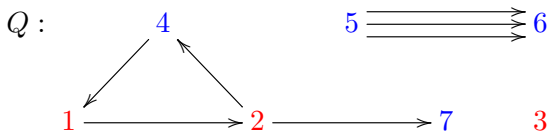
Restricción: Consideraremos únicamente carcajes finitos, sin ciclos de longitud 1 o 2.

Convención: Dos tipos de vértices: *mutables* y *congelados*

{vértices mutables} = $\{1, \dots, n\}$

{vértices congelados} = $\{n + 1, \dots, m\}$

Ejemplo:



Observación

Un carcaj sin ciclos de longitud 1 o 2 es lo mismo que una matriz antisimétrica con entradas enteras.

Ejemplo:

$$Q : 1 \longrightarrow 2 \rightrightarrows 3$$

corresponde a

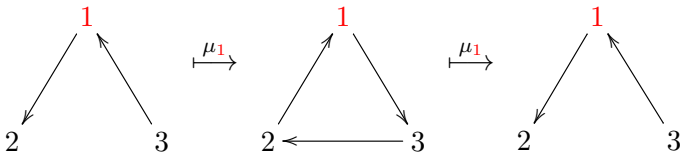
$$B_Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Regla: La entrada ij codifica el número de flechas de i a j .

Mutación de carcajes

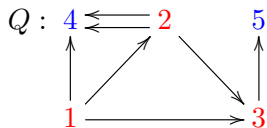
Sea k un vértice mutable de Q . La mutación de Q en dirección k es el carcaj $\mu_k(Q)$ que se construye a partir de Q como sigue:

- Paso 1. Por cada camino de longitud dos $i \rightarrow k \rightarrow j$, se añade una flecha $i \rightarrow j$.
- Paso 2. Se voltea la orientación de todas las flechas incidentes al vértice k .
- Paso 3. Se eliminan los ciclos de longitud 2.

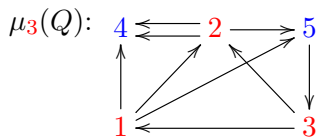
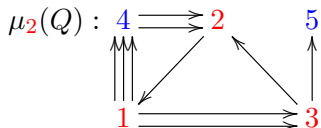
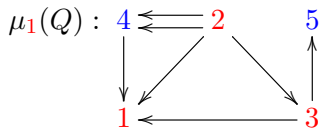


La mutación es una involución: $\mu_k(\mu_k(Q)) = Q$.

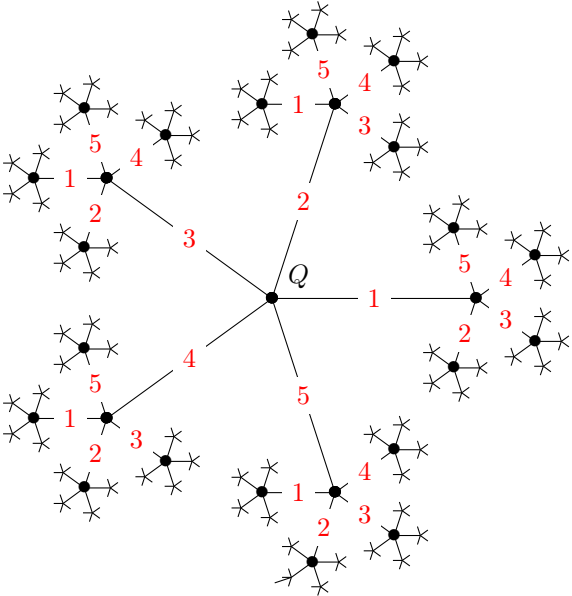
Ejemplo



Las tres mutaciones posibles de Q son:



Iteración de mutaciones



Conglomerados y semillas

Sea $\mathcal{F} := \mathbb{C}(x_1, \dots, x_m)$ el campo de funciones racionales en m variables.

Conglomerados y semillas

Sea $\mathcal{F} := \mathbb{C}(x_1, \dots, x_m)$ el campo de funciones racionales en m variables.

Definición

Un **conglomerado** en \mathcal{F} es un subconjunto $\{u_1, \dots, u_r\} \subset \mathcal{F}$ de elementos algebraicamente independientes sobre \mathbb{C} tales que

$$\mathcal{F} = \mathbb{C}(u_1, \dots, u_r)$$

.

Conglomerados y semillas

Sea $\mathcal{F} := \mathbb{C}(x_1, \dots, x_m)$ el campo de funciones racionales en m variables.

Definición

Un **conglomerado** en \mathcal{F} es un subconjunto $\{u_1, \dots, u_r\} \subset \mathcal{F}$ de elementos algebraicamente independientes sobre \mathbb{C} tales que

$$\mathcal{F} = \mathbb{C}(u_1, \dots, u_r)$$

Observación: Todo conglomerado consta de m elementos. Es decir, r es forzosamente igual a m en la definición anterior.

Conglomerados y semillas

Sea $\mathcal{F} := \mathbb{C}(x_1, \dots, x_m)$ el campo de funciones racionales en m variables.

Definición

Un **conglomerado** en \mathcal{F} es un subconjunto $\{u_1, \dots, u_r\} \subset \mathcal{F}$ de elementos algebraicamente independientes sobre \mathbb{C} tales que

$$\mathcal{F} = \mathbb{C}(u_1, \dots, u_r)$$

Observación: Todo conglomerado consta de m elementos. Es decir, r es forzosamente igual a m en la definición anterior.

Definición

Una **semilla** es una pareja (Q, \mathbf{x}) , donde Q es un carcaj y \mathbf{x} es un conglomerado en \mathcal{F} .

Mutación de semillas.

Sea (Q, \mathbf{x}) una semilla. Para cada vértice mutable k definimos una nueva semilla

$$\mu_k(Q, \mathbf{x}) = (\mu_k(Q), \mu_k(\mathbf{x}))$$

Dónde $\mu_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \setminus \{x_k\} \cup \{x'\}$

$$x' = \frac{\prod_{i \rightarrow k \in Q} x_i + \prod_{k \rightarrow j \in Q} x_j}{x_k}$$

La mutación es una involución: $\mu_k(\mu_k(Q, \mathbf{x})) = (Q, \mathbf{x})$.

Ejemplo

$$(Q, \mathbf{x}) = (1 \rightarrow 2 \Rightarrow 3, \{x_1, x_2, x_3\})$$

Ejemplo

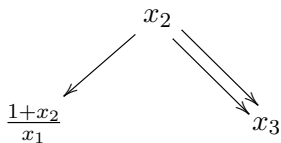
$$(Q, \mathbf{x}) = (\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{3}, \{x_1, x_2, x_3\}) \longleftrightarrow x_1 \rightarrow x_2 \Rightarrow x_3$$

Ejemplo

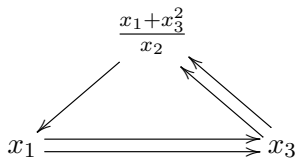
$$(Q, \mathbf{x}) = (1 \rightarrow 2 \rightrightarrows 3, \{x_1, x_2, x_3\}) \longleftrightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightrightarrows x_3$$

Las tres mutaciones posibles de (Q, \mathbf{x}) son:

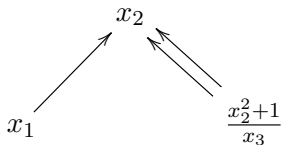
μ_1 :



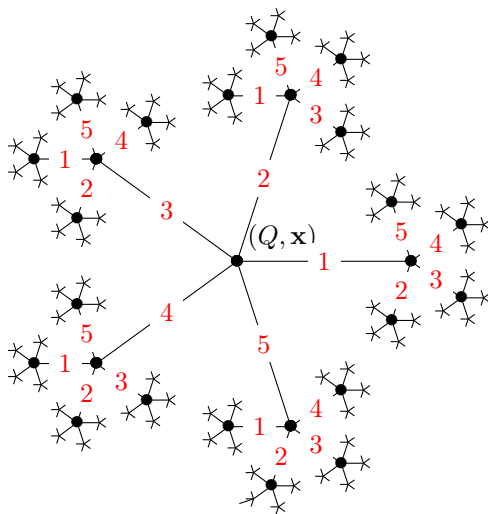
μ_2 :



μ_3 :



Iteración de mutaciones de semillas



Escribimos $(Q, \mathbf{x}) \sim (Q', \mathbf{x}')$ si estas semillas pueden ser conectadas por medio de mutación iterada.

La definición

Definición

Sea Q un carcaj.

- ▶ $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_m\}$ es el **conglomerado inicial**
- ▶ (Q, \mathbf{x}) es la **semilla inicial**
- ▶ $\mathcal{X}_Q = \bigcup_{\mathbf{x} \sim \mathbf{x}'} \mathbf{x}'$ el conjunto de **variables de conglomerado**

La definición

Definición

Sea Q un carcaj.

- ▶ $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_m\}$ es el **conglomerado inicial**
- ▶ (Q, \mathbf{x}) es la **semilla inicial**
- ▶ $\mathcal{X}_Q = \bigcup_{\mathbf{x} \sim \mathbf{x}'} \mathbf{x}'$ el conjunto de **variables de conglomerado**

El **álgebra de conglomerado** asociada a Q es la \mathbb{C} -subálgebra de $\mathcal{F} = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_m)$ generada por las variables de conglomerado.

$$\mathcal{A}_Q = \langle \mathcal{X}_Q \rangle$$

La definición

Definición

Sea Q un carcaj.

- ▶ $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_m\}$ es el **conglomerado inicial**
- ▶ (Q, \mathbf{x}) es la **semilla inicial**
- ▶ $\mathcal{X}_Q = \bigcup_{\mathbf{x} \sim \mathbf{x}'} \mathbf{x}'$ el conjunto de **variables de conglomerado**

El **álgebra de conglomerado** asociada a Q es la \mathbb{C} -subálgebra de $\mathcal{F} = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_m)$ generada por las variables de conglomerado.

$$\mathcal{A}_Q = \langle \mathcal{X}_Q \rangle$$

\mathcal{A}_Q es independiente del conglomerado inicial: podríamos escoger otro conglomerado inicial y obtendríamos un álgebra isomorfa.

Ejemplo

$$x_1 \rightarrow x_2$$

Ejemplo

$$x_1 \rightarrow x_2$$

1

Ejemplo

$$\begin{array}{ccc} & & x_1 \rightarrow x_2 \\ & \nearrow & \\ & 1 & \\ & \swarrow & \\ \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow & x_2 & \end{array}$$

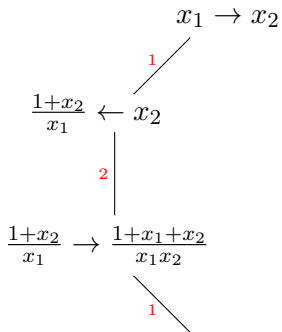
Ejemplo

$$\begin{array}{ccc} & & x_1 \rightarrow x_2 \\ & \swarrow & \\ & 1 & \\ & \swarrow & \\ \frac{1+x_2}{x_1} & \leftarrow & x_2 \\ & \downarrow & \\ & 2 & \end{array}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{ccc} & & x_1 \rightarrow x_2 \\ & & \swarrow \\ & & 1 \\ & & \swarrow \\ \frac{1+x_2}{x_1} & \leftarrow & x_2 \\ & & \downarrow \\ & & 2 \\ \frac{1+x_2}{x_1} & \rightarrow & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \end{array}$$

Ejemplo



Ejemplo

$$\begin{array}{ccc} & & x_1 \rightarrow x_2 \\ & & / \\ & & 1 \\ & & \backslash \\ \frac{1+x_2}{x_1} & \leftarrow & x_2 \\ & & | \\ & & 2 \\ & & | \\ \frac{1+x_2}{x_1} & \rightarrow & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \\ & & \backslash \\ & & 1 \end{array}$$

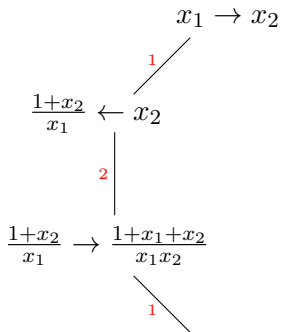
$$\left(1 + \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right) \div \frac{1+x_2}{x_1}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{ccc} & & x_1 \rightarrow x_2 \\ & & \swarrow \\ & & 1 \\ & & \swarrow \\ \frac{1+x_2}{x_1} & \leftarrow & x_2 \\ & & \downarrow \\ & & 2 \\ \frac{1+x_2}{x_1} & \rightarrow & \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \\ & & \searrow \\ & & 1 \end{array}$$

$$\left(1 + \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right) \div \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{x_1x_2 + 1 + x_1 + x_2}{x_2(1+x_2)}$$

Ejemplo



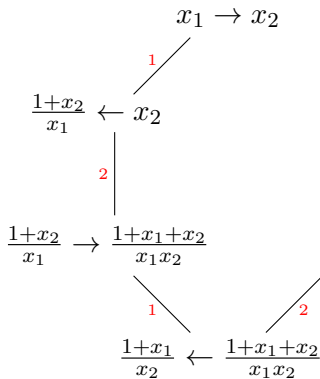
$$\left(1 + \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right) \div \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{x_1x_2 + 1 + x_1 + x_2}{x_2(1+x_2)} = \frac{1+x_1}{x_2}$$

Ejemplo

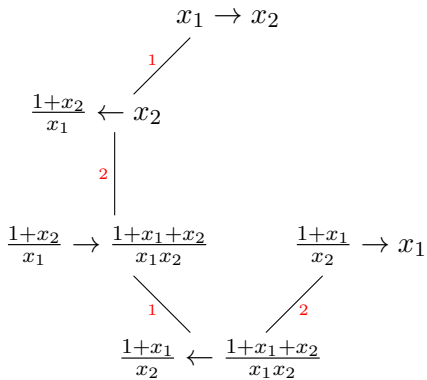
$$\begin{array}{c} x_1 \rightarrow x_2 \\ \swarrow \text{1} \\ \frac{1+x_2}{x_1} \leftarrow x_2 \\ \downarrow \text{2} \\ \frac{1+x_2}{x_1} \rightarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \\ \searrow \text{1} \\ \frac{1+x_1}{x_2} \leftarrow \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \end{array}$$

$$\left(1 + \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right) \div \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{x_1x_2 + 1 + x_1 + x_2}{x_2(1+x_2)} = \frac{1+x_1}{x_2}$$

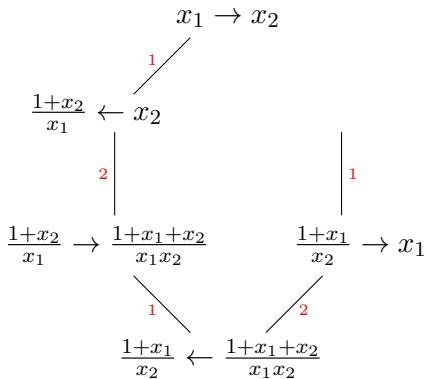
Ejemplo



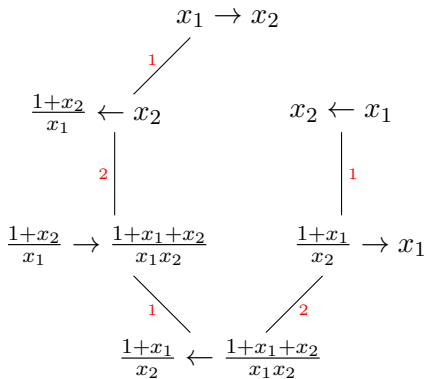
Ejemplo



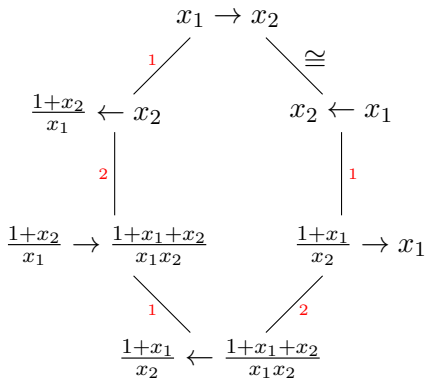
Ejemplo



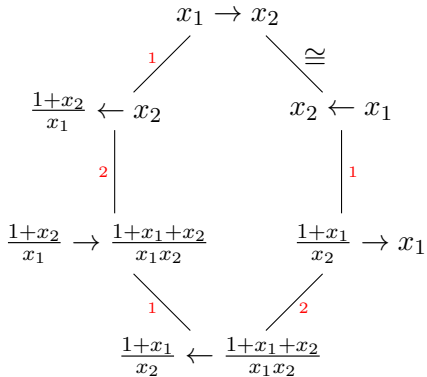
Ejemplo



Ejemplo



Ejemplo



$$\mathcal{A}_Q = \left\langle x_1, x_2, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}, \frac{1+x_1}{x_2} \right\rangle$$

Propiedades fundamentales

Teorema (Fomin-Zelevinsky 2001 [FZ1]). \mathcal{A}_Q depende únicamente de la clase de mutación de Q .

Teorema (Fomin-Zelevinsky 2001 [FZ1]). \mathcal{A}_Q depende únicamente de la clase de mutación de Q .

Teorema (Fomin-Zelevinsky 2001 [FZ1]). Todas las variables de conglomerado son polinomios de Laurent, con coeficientes enteros, en los elementos del conglomerado inicial. Más aún

$$\mathcal{X}_Q \subset \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, x_{n+1}, \dots, x_m]$$

Teorema (Fomin-Zelevinsky 2001 [FZ1]). \mathcal{A}_Q depende únicamente de la clase de mutación de Q .

Teorema (Fomin-Zelevinsky 2001 [FZ1]). Todas las variables de conglomerado son polinomios de Laurent, con coeficientes enteros, en los elementos del conglomerado inicial. Más aún

$$\mathcal{X}_Q \subset \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, x_{n+1}, \dots, x_m]$$

Conjetura de positividad (Fomin-Zelevinsky 2001 [FZ1]).

$$\mathcal{X}_Q \subset \mathbb{N}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, x_{n+1}, \dots, x_m]$$

Teorema (Fomin-Zelevinsky 2001 [FZ1]). \mathcal{A}_Q depende únicamente de la clase de mutación de Q .

Teorema (Fomin-Zelevinsky 2001 [FZ1]). Todas las variables de conglomerado son polinomios de Laurent, con coeficientes enteros, en los elementos del conglomerado inicial. Más aún

$$\mathcal{X}_Q \subset \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, x_{n+1}, \dots, x_m]$$

Conjetura de positividad (Fomin-Zelevinsky 2001 [FZ1]).

$$\mathcal{X}_Q \subset \mathbb{N}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, x_{n+1}, \dots, x_m]$$

Teorema (Gross-Hacking-Keel-Kontsevich 2014 [GHKK])
La conjetura de positividad es verdadera.

Teorema (Fomin-Zelevinsky 2001 [FZ1]). \mathcal{A}_Q depende únicamente de la clase de mutación de Q .

Teorema (Fomin-Zelevinsky 2001 [FZ1]). Todas las variables de conglomerado son polinomios de Laurent, con coeficientes enteros, en los elementos del conglomerado inicial. Más aún

$$\mathcal{X}_Q \subset \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, x_{n+1}, \dots, x_m]$$

Conjetura de positividad (Fomin-Zelevinsky 2001 [FZ1]).

$$\mathcal{X}_Q \subset \mathbb{N}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, x_{n+1}, \dots, x_m]$$

Teorema (Gross-Hacking-Keel-Kontsevich 2014 [GHKK])

La conjetura de positividad es verdadera.

La demostración de la conjetura de positividad es geométrica y utiliza ideas de la *simetría especular* (teoría originada en el contexto de la teoría de cuerdas (\sim 1990) que ha tenido gran influencia en las matemáticas del siglo XXI).

Bases

Un **monomio de conglomerado** es un monomio en los elementos de un conglomerado.

Por ejemplo, si $Q = 1 \rightarrow 2$, los monomios de conglomerado son de la forma

$$\blacktriangleright x_1^a x_2^b$$

$$\blacktriangleright x_1^a \left(\frac{x_1+1}{x_2} \right)^b$$

$$\blacktriangleright \left(\frac{x_1+x_2+1}{x_1 x_2} \right)^a \left(\frac{x_1+1}{x_2} \right)^b$$

$$\blacktriangleright \left(\frac{x_1+x_2+1}{x_1 x_2} \right)^a \left(\frac{x_2+1}{x_1} \right)^b$$

$$\blacktriangleright x_1^a \left(\frac{x_2+1}{x_1} \right)^b$$

con $a, b \in \mathbb{N}$.

Al crear este concepto Fomin y Zelevinsky esperaban que

1. Los monomios de conglomerado fueran una base para \mathcal{A}_Q .
2. Para todo grupo reductivo G y $\mathbb{C}[G]$ es un álgebra de conglomerado. Más aún la base dual canónica \mathbb{B}_1 es el conjunto de monomios de conglomerado.

Después de muchos años de esfuerzo colectivo se sabe que

1. Los monomios son una base de \mathcal{A}_Q si y solamente si Q es de tipo finito.
2. Para todo grupo reductivo G en efecto $\mathbb{C}[G]$ es un álgebra de conglomerado, pero la base dual canónica \mathbb{B}_1 en general contiene propiamente a los monomios de conglomerado.

Ejemplos

Recordemos que

$$\mathbb{C}[SL_2(\mathbb{C})] = \mathbb{C}[z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}] / \langle z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} - 1 \rangle$$

Veamos que $\mathbb{C}[SL_2(\mathbb{C})] = \mathcal{A}_Q$ para $Q = 2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3$

Recordemos que

$$\mathbb{C}[SL_2(\mathbb{C})] = \mathbb{C}[z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}] / \langle z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} - 1 \rangle$$

Veamos que $\mathbb{C}[SL_2(\mathbb{C})] = \mathcal{A}_Q$ para $Q = 2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3$

$$x_2 \longrightarrow x_1 \longleftarrow x_3$$

Recordemos que

$$\mathbb{C}[SL_2(\mathbb{C})] = \mathbb{C}[z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}] / \langle z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} - 1 \rangle$$

Veamos que $\mathbb{C}[SL_2(\mathbb{C})] = \mathcal{A}_Q$ para $Q = 2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3$

$$x_2 \longrightarrow x_1 \longleftarrow x_3 \quad \overset{1}{\longleftrightarrow}$$

Recordemos que

$$\mathbb{C}[SL_2(\mathbb{C})] = \mathbb{C}[z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}] / \langle z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} - 1 \rangle$$

Veamos que $\mathbb{C}[SL_2(\mathbb{C})] = \mathcal{A}_Q$ para $Q = 2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3$

$$x_2 \longrightarrow x_1 \longleftarrow x_3 \quad \overset{1}{\longleftrightarrow} \quad x_2 \longleftarrow \frac{x_2x_3 + 1}{x_1} \longrightarrow x_3$$

Recordemos que

$$\mathbb{C}[SL_2(\mathbb{C})] = \mathbb{C}[z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}] / \langle z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} - 1 \rangle$$

Veamos que $\mathbb{C}[SL_2(\mathbb{C})] = \mathcal{A}_Q$ para $Q = 2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3$

$$x_2 \longrightarrow x_1 \longleftarrow x_3 \quad \overset{1}{\longleftrightarrow} \quad x_2 \longleftarrow \frac{x_2x_3 + 1}{x_1} \longrightarrow x_3$$

Por lo tanto $\mathcal{A}_Q = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, donde $x_4 := \frac{x_2x_3 + 1}{x_1}$.

Recordemos que

$$\mathbb{C}[SL_2(\mathbb{C})] = \mathbb{C}[z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}] / \langle z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} - 1 \rangle$$

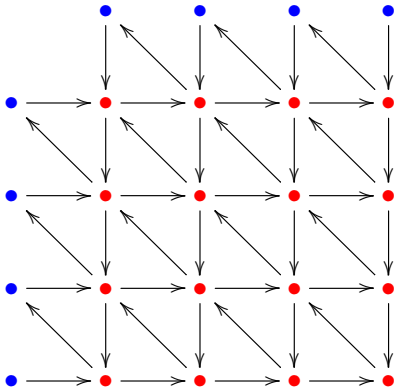
Veamos que $\mathbb{C}[SL_2(\mathbb{C})] = \mathcal{A}_Q$ para $Q = 2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3$

$$x_2 \longrightarrow x_1 \longleftarrow x_3 \quad \overset{1}{\longleftrightarrow} \quad x_2 \longleftarrow \frac{x_2x_3 + 1}{x_1} \longrightarrow x_3$$

Por lo tanto $\mathcal{A}_Q = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$, donde $x_4 := \frac{x_2x_3 + 1}{x_1}$.

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}[SL_2] \rightarrow \mathcal{A}_Q \text{ dada por} \quad & \begin{aligned} \phi(\overline{z_{11}}) &= x_1 \\ \phi(\overline{z_{12}}) &= x_2 \\ \phi(\overline{z_{21}}) &= x_3 \\ \phi(\overline{z_{22}}) &= x_4 \end{aligned} \end{aligned} \quad \text{es un isomorfismo}$$

Más generalmente $\mathbb{C}[SL_n(\mathbb{C})]$ tiene una estructura de conglomerado. Por ejemplo para $SL_5(\mathbb{C})$ el carcaj Q es



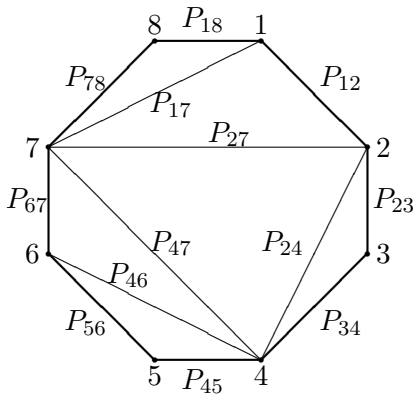
De regreso a las Grassmannianas

Veamos que los anillos $\mathbb{C}[\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)]$ también son álgebras de conglomero. Para ello necesitamos la siguiente presentación de $\mathbb{C}[\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)]$.

$$\mathbb{C}[\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)] = \mathbb{C}[P_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n] / \langle \text{relaciones de Plücker} \rangle$$

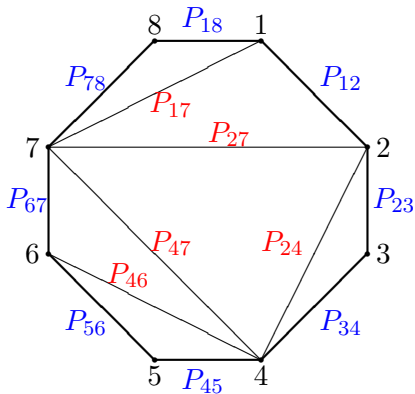
Modelo geométrico

$\{ \text{coordenada de Plücker de } \text{Gr}_2(\mathbb{C}^n) \} \leftrightarrow \{ \text{cuerdas de un } n\text{-ágono} \}$
 $P_{ij} \quad \mapsto \quad \text{arco } \overline{ij}$

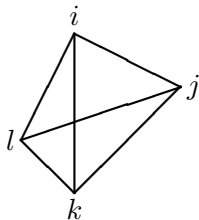


Modelo geométrico

{coordenada de Plücker de $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$ } \leftrightarrow {cuerdas de un n -ágono}
 P_{ij} \mapsto arco \overline{ij}

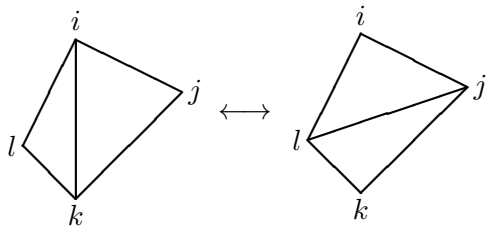


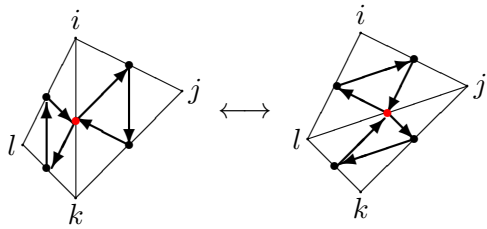
Los cuadriláteros codifican las relaciones de Grassmann-Plücker.

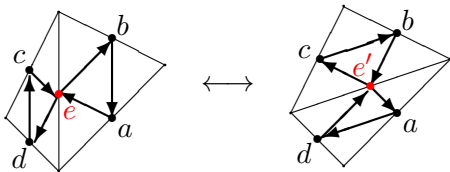


Entonces

$$P_{ik}P_{jl} = P_{ij}P_{kl} + P_{il}P_{jk}.$$



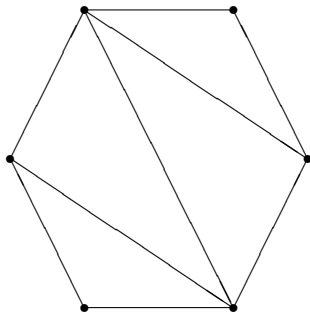




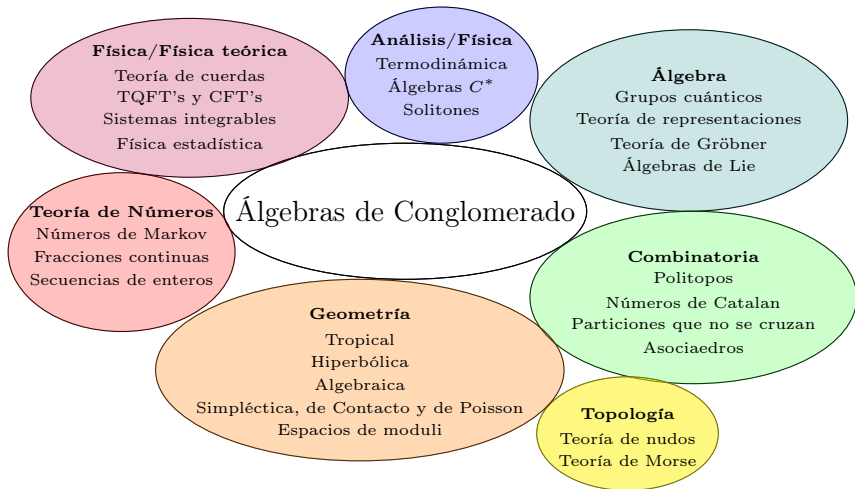
$$ee' = ac + bd$$

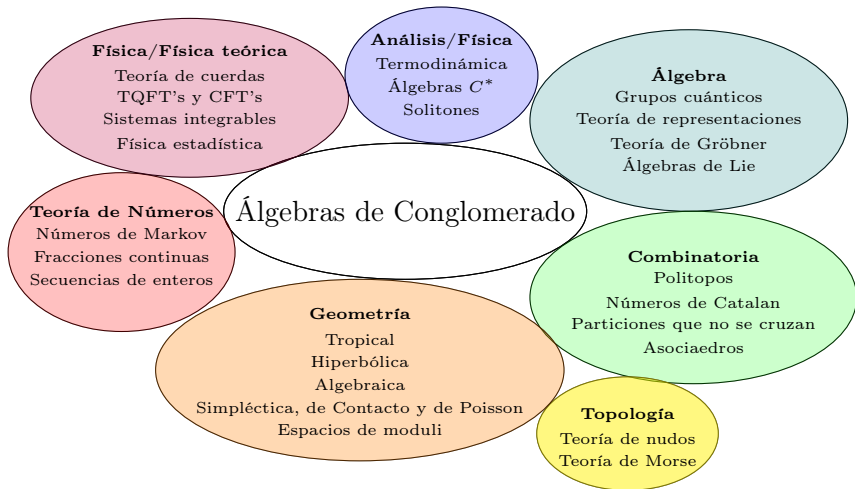
$$ee' = \prod_{z \rightarrow e} z + \prod_{w \leftarrow e} w$$

Estructura de conglomerado para $\text{Gr}_2(\mathbb{C}^n)$



vértices mutables	\leftrightarrow	diagonales
vértices congelados	\leftrightarrow	lados
conglomerado/semilla	\leftrightarrow	triangulación
mutación	\leftrightarrow	flip
relaciones de intercambio	\leftrightarrow	relaciones de Grassmann-Plücker





Clasificación matemática: Cluster algebras (13F60).

Aplicación (termodinámica): Prueba de la conjetura de periodicidad de Zamolodchikov por Bernhard Keller.

Referencias

- BFZ** Arkady Berenstein, Sergey Fomin y Andrei Zelevinsky
Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells.
Duke Math. J., 126 (2005), no. 1, 1–52.
- F** Sergey Fomin
Total positivity and cluster algebras.
Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Volume II, 125–145.
- FZ1** Sergey Fomin y Andrei Zelevinsky.
Cluster algebras. I. Foundations.
J. Amer. Math. Soc., 15(2):497–529, 2002.
- FZ2** Sergey Fomin y Andrei Zelevinsky.
Cluster algebras. II. Finite type classification.
Invent. Math., 154 (2003), no. 1, 63–121.
- FZ3** Sergey Fomin y Andrei Zelevinsky.
Y-systems and generalized associahedra.
Ann. of Math., 158 (2003), no. 3, 977–1018.
- GHKK** Mark Gross, Paul Hacking, Sean Keel y Maxim Kontsevich.
Canonical bases for cluster algebras.
J. Amer. Math. Soc., 31(2):497–608 (2018)
- K** Bernhard Keller.
The periodicity conjecture for pairs of Dynkin diagrams.
Ann. of Math., 177 (2013), no. 1, 111–170.
- L** George Lusztig
Total positivity and canonical bases.
Lie theory and geometry, 531–568. *Progr. Math.*, 123, Birkhäuser Boston, 1994.