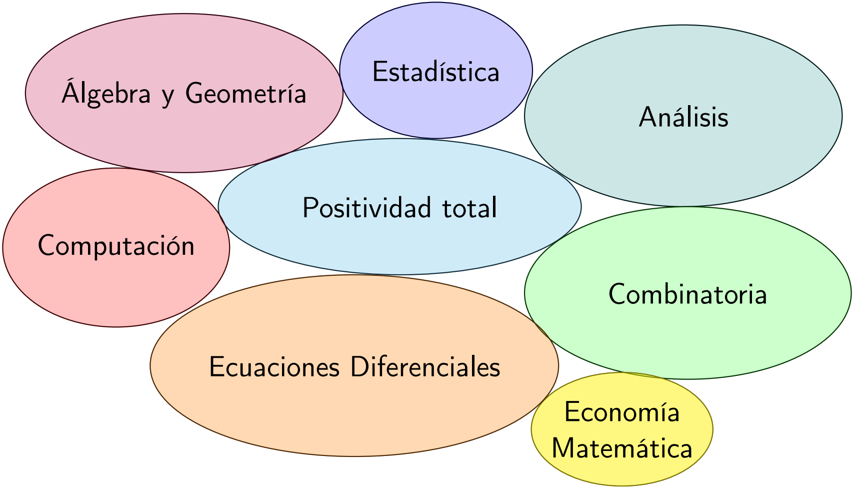
Escuela de Matemáticas: Positividad Total

Lara Bossinger

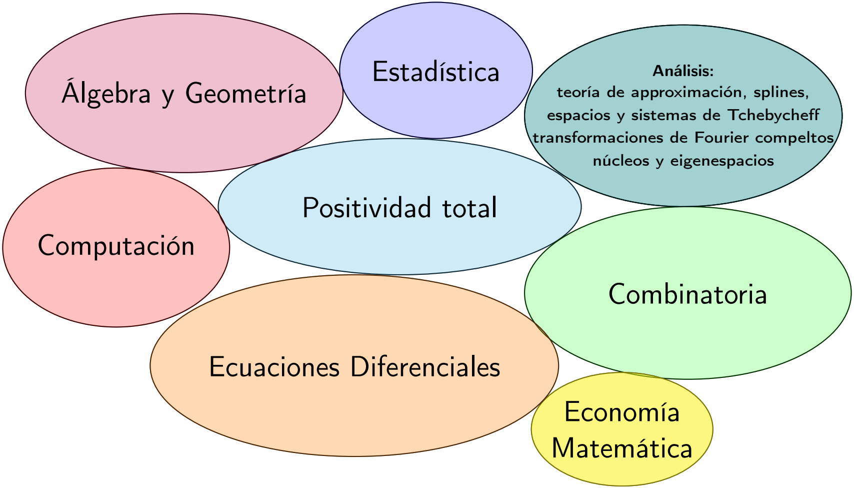
Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Enero 9 2022

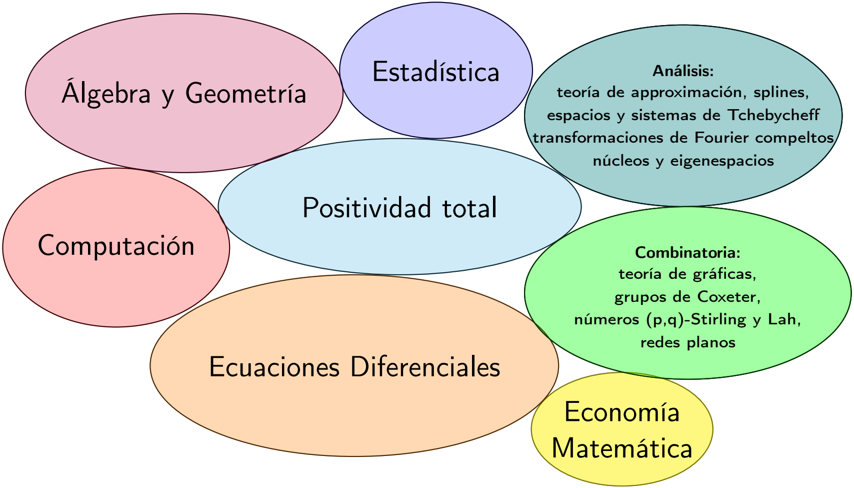
¿Donde encontramos la positividad total?



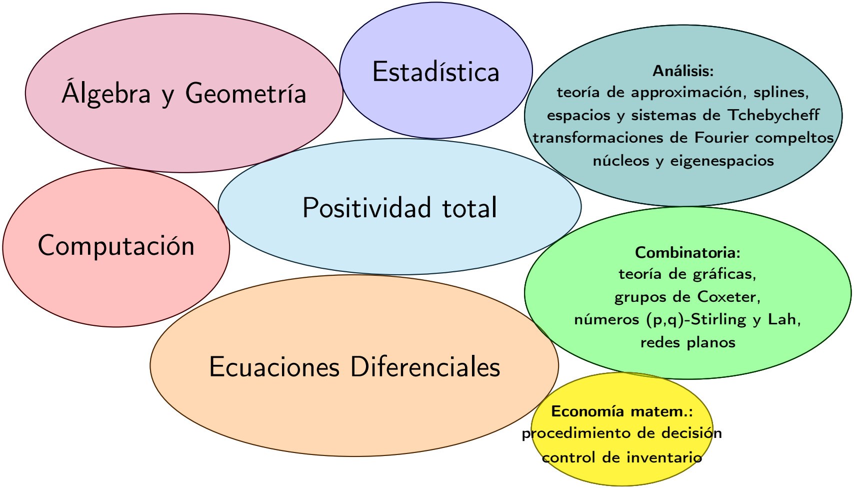
¿Donde encontramos la positividad total?



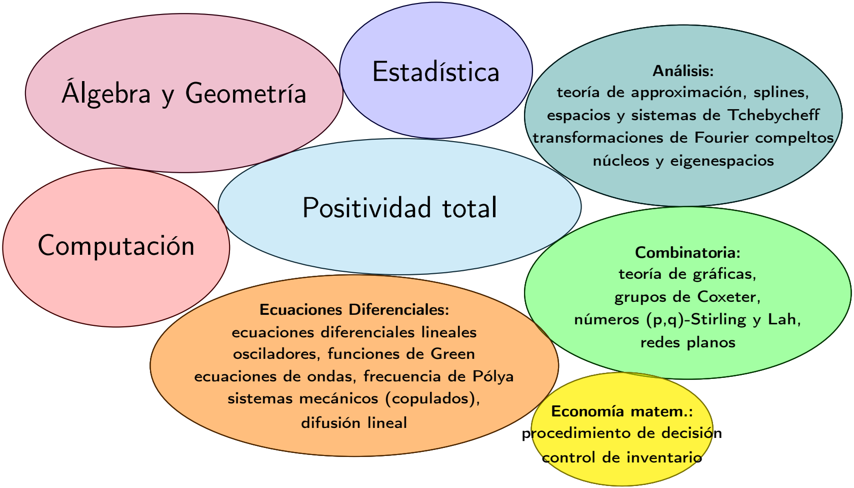
¿Donde encontramos la positividad total?



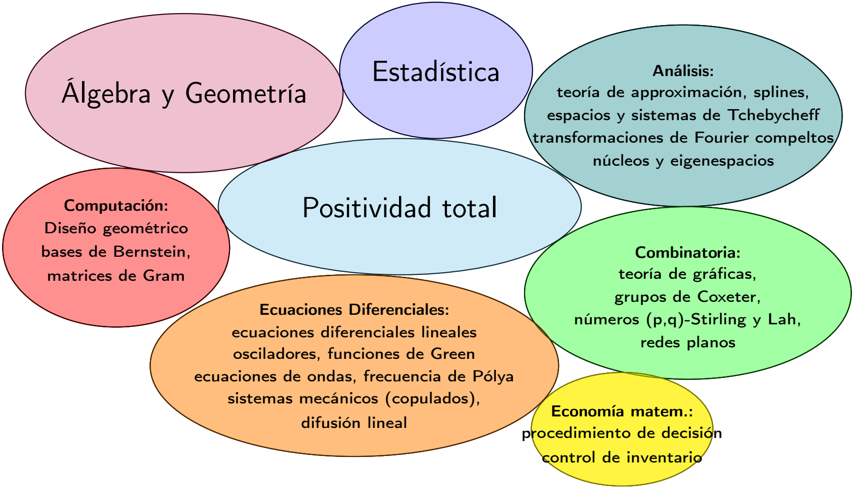
¿Donde encontramos la positividad total?



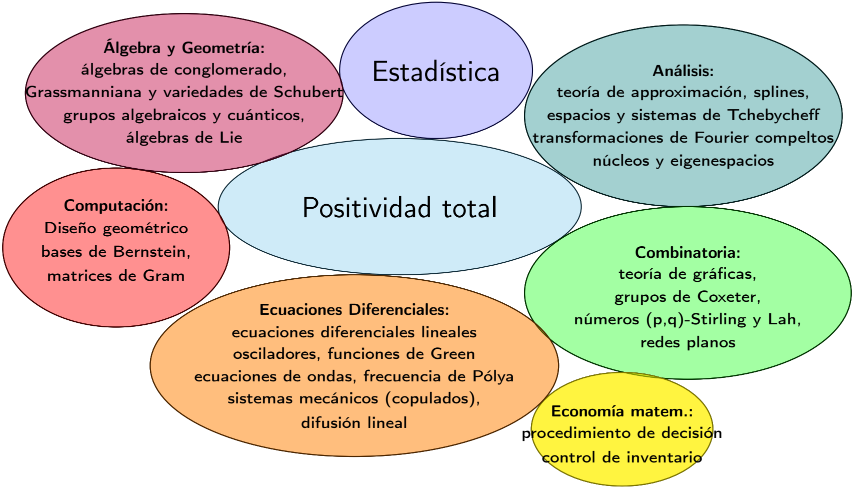
¿Donde encontramos la positividad total?



¿Donde encontramos la positividad total?



¿Donde encontramos la positividad total?



¿Donde encontramos la positividad total?

Álgebra y Geometría:
álgebras de conglomerado,
Grassmanniana y variedades de Schubert
grupos algebraicos y cuánticos,
álgebras de Lie

Estadística:
Matrices de momento
Diseño óptimo en
regresión polinomial

Análisis:
teoría de approximación, splines,
espacios y sistemas de Tchebycheff
transformaciones de Fourier compeltos
núcleos y eigenespacios

Positividad total

Computación:
Diseño geométrico
bases de Bernstein,
matrices de Gram

Combinatoria:
teoría de gráficas,
grupos de Coxeter,
números (p,q)-Stirling y Lah,
redes planos

Ecuaciones Diferenciales:
ecuaciones diferenciales lineales
osciladores, funciones de Green
ecuaciones de ondas, frecuencia de Pólya
sistemas mecánicos (copulados),
difusión lineal

Economía matem.:
procedimiento de decisión
control de inventario

Álgebra lineal

Nos acordamos que un *menor de una matriz* es una determinante de una submatriz cuadrada: sean $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathring{\mathbb{i}} = (1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$ y $\mathring{\mathbb{j}} = (1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq m)$ secuencias de números en $[n] := \{1, \ldots, n\}$, resp. $[m]$ con $1 \leq p \leq \min\{n, m\}$. Entonces, $(\mathring{\mathbb{i}}, \mathring{\mathbb{j}})$ define una submatriz cuadrada de A:

$$A[\mathring{\mathbb{i}}, \mathring{\mathbb{j}}] := (a_{ij})_{i\in\mathring{\mathbb{i}}, j\in\mathring{\mathbb{j}}} = \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \ldots & a_{i_1,j_p} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \ldots & a_{i_2,j_p} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{i_p,j_1} & a_{i_p,j_2} & \ldots & a_{i_p,j_p}. \end{pmatrix}.$$

El *menor de A* asociado al par $(\mathring{\mathbb{i}}, \mathring{\mathbb{j}})$ es

$$A(\mathring{\mathbb{i}}, \mathring{\mathbb{j}}) := \det(A[\mathring{\mathbb{i}}, \mathring{\mathbb{j}}]).$$

Matrices totalmente positivas y totalmente no negativas

Definición

Una matriz $n \times m$ con entradas en los números reales se llama totalmente positiva o TP (resp. totalmente no negativa o TNN) si todos sus minores son números reales positivos (resp. números reales no negativos).

Ejercicio 1

Calcula todos los minores de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Hay matrices totalmente positivos o totalmente no negativos entre ellos? ¿Cuantos menores hay de cada tamaño? ¿Cuántos menores tiene una matriz $n \times n$?

Referencias

Pin A. Pinkus. Totally Positive Matrices. Cambridge University Press 2010

Kar S. Karlin. Total Positivity Volume I. Stanford University Press 1968

TPA Total Positivity and Its Applications. Editors: M. Hazewinkel (managing), M. Gasca, C.A. Micchelli. Springer: Mathematics and Its Applications Volume 359, 1996

Kod Y. Kodama. KP Solitons and the Grassmannians. SpringerBriefs in Mathematical Physics Volume 22, 2017