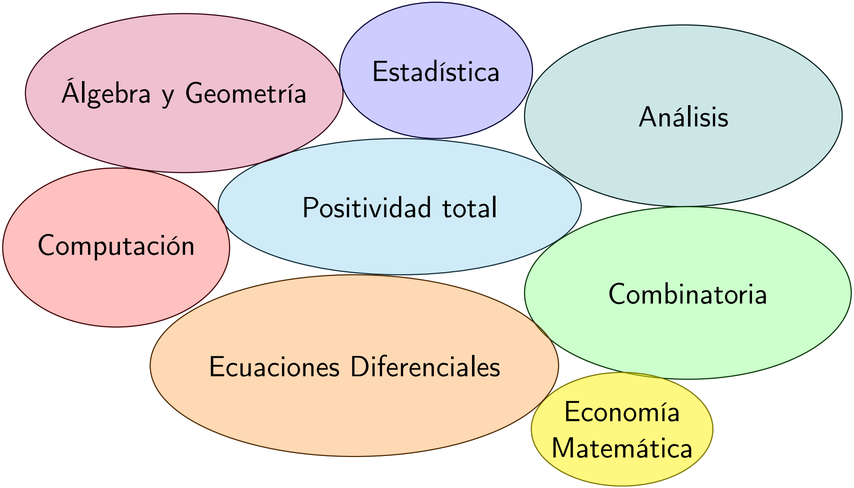
Escuela de Matemáticas: Positividad Total

Lara Bossinger

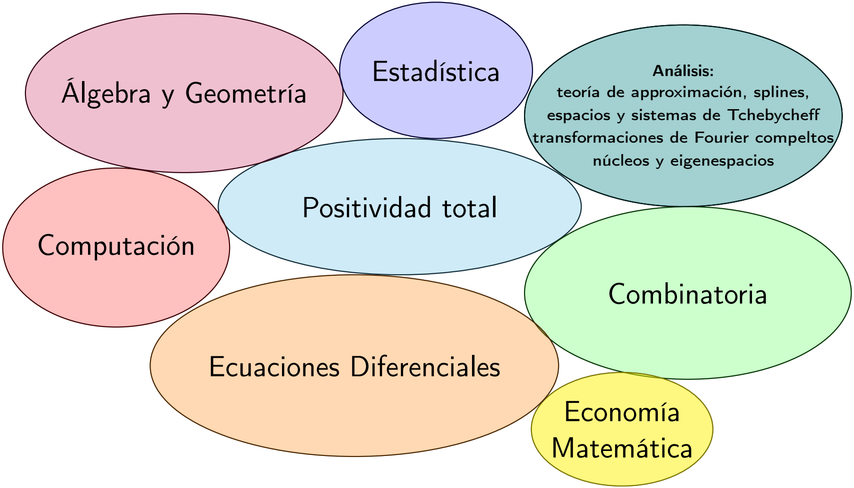
Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Enero 9 2022

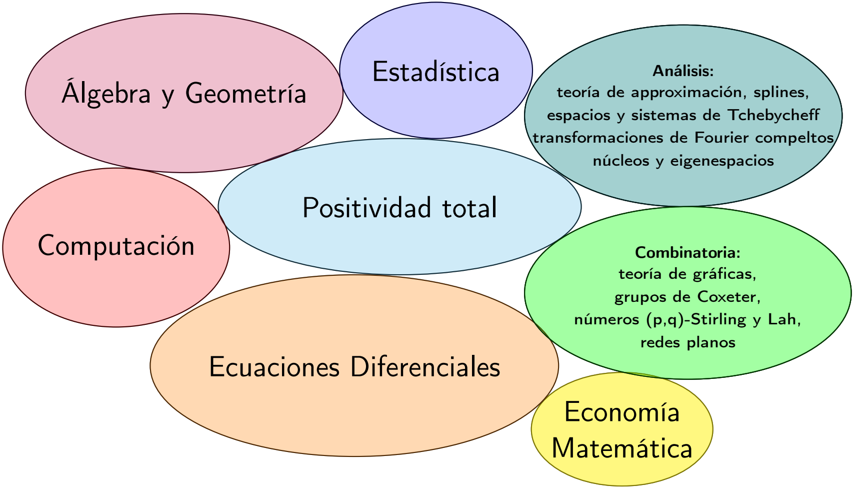
¿Donde encontramos la positividad total?



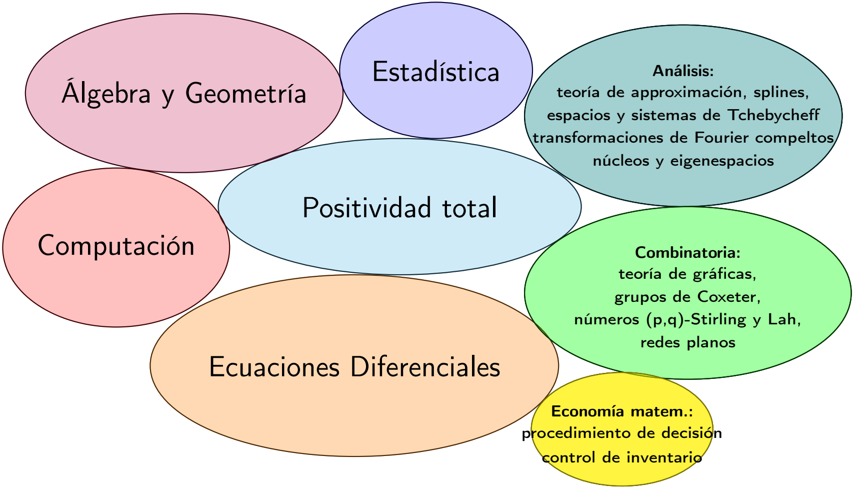
¿Donde encontramos la positividad total?



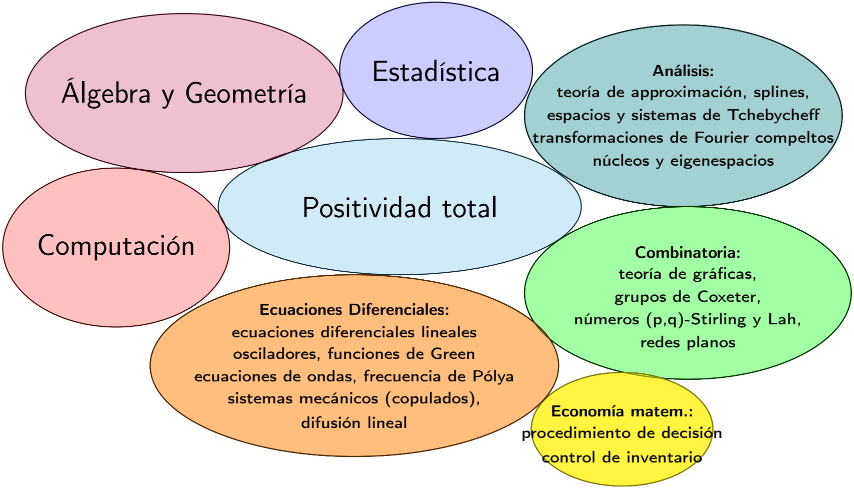
¿Donde encontramos la positividad total?



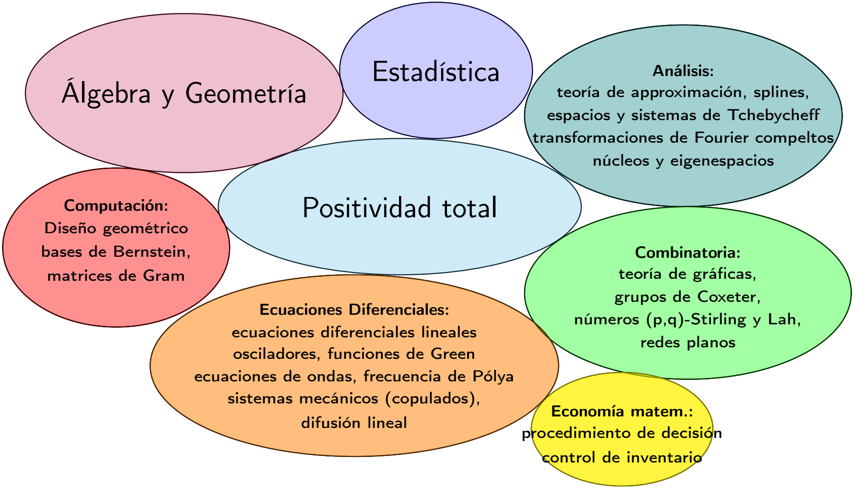
¿Donde encontramos la positividad total?



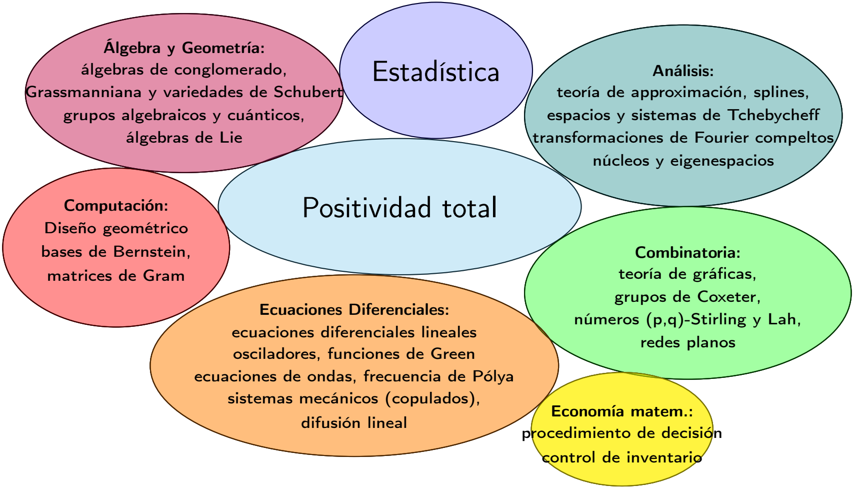
¿Donde encontramos la positividad total?



¿Donde encontramos la positividad total?



¿Donde encontramos la positividad total?



¿Donde encontramos la positividad total?

Positividad total

Álgebra y Geometría:
álgebras de conglomerado,
Grassmanniana y variedades de Schubert
grupos algebraicos y cuánticos,
álgebras de Lie

Estadística:
Matrices de momento
Diseño óptimo en
regresión polinomial

Análisis:
teoría de approximación, splines,
espacios y sistemas de Tchebycheff
transformaciones de Fourier compeltos
núcleos y eigenespacios

Computación:
Diseño geométrico
bases de Bernstein,
matrices de Gram

Combinatoria:
teoría de gráficas,
grupos de Coxeter,
números (p,q)-Stirling y Lah,
redes planos

Ecuaciones Diferenciales:
ecuaciones diferenciales lineales
osciladores, funciones de Green
ecuaciones de ondas, frecuencia de Pólya
sistemas mecánicos (copulados),
difusión lineal

Economía matem.:
procedimiento de decisión
control de inventario

Álgebra lineal

Nos acordamos que un *menor de una matriz* es una determinante de una submatriz cuadrada: sean $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbb{i} = (1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n)$ y $\mathbb{j} = (1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq m)$ secuencias de números en $[n] := \{1, \ldots, n\}$, resp. $[m]$ con $1 \leq p \leq \min\{n, m\}$. Entonces, $(\mathbb{i}, \mathbb{j})$ define una submatriz cuadrada de A:

$$A[\mathbb{i}, \mathbb{j}] := (a_{ij})_{i \in \mathbb{i}, j \in \mathbb{j}} = \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \ldots & a_{i_1,j_p} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \ldots & a_{i_2,j_p} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{i_p,j_1} & a_{i_p,j_2} & \ldots & a_{i_p,j_p}. \end{pmatrix}.$$

El *menor de A* asociado al par $(\mathbb{i}, \mathbb{j})$ es

$$A(\mathbb{i}, \mathbb{j}) := \det(A[\mathbb{i}, \mathbb{j}]).$$

Matrices totalmente positivas y totalmente no negativas

Definición

Una matriz $n \times m$ con entradas en los números reales se llama totalmente positiva o TP (resp. totalmente no negativa o TNN) si todos sus minores son números reales positivos (resp. números reales no negativos).

Ejercicio 1

Calcula todos los minores de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Hay matrices totalmente positivos o totalmente no negativos entre ellos? ¿Cuantos menores hay de cada tamaño? ¿Cuántos menores tiene una matriz $n \times n$?

§1 Propiedades básicas de matrices totalmente positivas

Productos de matrices y el determinante

Una pregunta natural es si la positividad total es una propiedad que se preserva bajo operaciones básicas en matrices, por ejemplo la multiplicación.

Nos acordamos del siguiente resultado del álgebra lineal:

Teorema (Cauchy–Binet)

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *y* $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *y* $C = AB$. *Entonces,*

$$\det(C) = \sum_{\mathbb{i}\in\binom{[n]}{m}} A([m],\mathbb{i})B(\mathbb{i},[m]). \tag{0.1}$$

Cauchy-Binet y matrices TP/TNN

Observa que podemos usar la formula (0.1) para calcular menores de matrices.

Corolario 1

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ dos matrices totalmente positivas. Entonces, $C = AB$ es totalmente positiva.

Ejercicio 2

Prueba el Corolario 1 usando el Teorema 7

Certificados

Para aplicaciones en general es importante decidir dado una matriz, si es totalmente positiva (o totalmente no negativa) o no:

Un *certificado de positividad* (para matrices en $\mathbb{R}^{n \times m}$) es un conjunto de menores cuya positividad implica la positividad de *todos* los menores.

Entonces, necesitamos herramientas que nos dejan verificarlo. Un problema es que el número de menores de una matriz crece de manera exponencial con su dimensión (Ejercicio 1).

Por lo tanto es importante que encontramos un test *eficiente* de positividad donde la cardinalidad del certificado es el mínimo.

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *Los menores son*

$$a, b, c, d \quad y \quad \Delta = ad - bc.$$

Podemos expresar $d = \frac{\Delta + bc}{a}$ *y* $a = \frac{\Delta + bc}{d}$. *Entonces, los dos conjunto*

$$\{a, b, c, \Delta\} \quad y \quad \{d, b, c, \Delta\}$$

son certificados de positividad para A. *Nota que los dos tienen cuatro elementos, que es justo el grado de libertad que tenemos en escoger los elementos* a, b, c, d*–o equivalentemente es la dimensión de* $\mathbb{R}^{2\times 2}$. *En particular, los dos son test de positividad eficientes.*

Ejercicio 3

Sea $A = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

1. *Da un test de positividad para* A. *¿Cuántos elementos tiene?*
2. *¿Cuáles son las condiciones en* a, b, c, d, e *para que* A *sea totalmente positiva/no negativa?*

§2 Certificados de positividad total

Matrices especiales

Existen matrices para las que resulta relativamente fácil determinar su positividad (o más bien su no-negatividad):
matrices diagonales, triangulares superiores y inferiores.

Ejercicio 4

Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *es una matriz triangular superior (entonces* $a_{ij} = 0$ *si* $i > j$*). ¿Con* $n = 3$ *cuáles* $\mathbb{i}, \mathbb{j} \in \binom{[3]}{p}$ *cumplen* $A(\mathbb{i}, \mathbb{j}) = 0$ *para toda* A*? ¿Qué para para* n *arbitrario?*

Matrices especiales

Existen matrices para las que resulta relativamente fácil determinar su positividad (o más bien su no-negatividad):
matrices diagonales, triangulares superiores y inferiores.

Ejercicio 4

Si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ es una matriz triangular superior (entonces $a_{ij} = 0$ si $i > j$). ¿Con $n = 3$ cuáles $\mathbb{i}, \mathbb{j} \in \binom{[3]}{p}$ cumplen $A(\mathbb{i}, \mathbb{j}) = 0$ para toda A? ¿Qué para para n arbitrario?

Observamos que para n arbitrario $A(\mathbb{i}, \mathbb{j}) = 0, \quad \text{si} \quad i_k > j_k \ \forall k$.
De manera similar, si A es triangular inferior tenemos que $A(\mathbb{i}, \mathbb{j}) = 0$, si $i_k < j_k$ para todos los k.

Certificados para matrices triangulares

De hecho podemos aún reducir más el número de minores que tenemos que calcular en este caso:

Teorema (Teorema 2.8, Pinkus)

Sea $A \in \mathbb{R}^{n^2}$ una matriz triangular superior (resp. inferior). Si A satisface

$$A([k],[j+1,j+k]) > 0 \quad (\textit{resp. } A([j+1,j+k],[k]) > 0)$$

para todos los $j \in [0, n-k]$ y $k \in [n]$, entonces A es totalmente no-negativa.

Descomposiciones de matrices

Combinando con el Corolario de Cauchy-Binet resulta útil tener una descomposición de matrices en matrices triangulares y diagonales–*LDU* en inglés, *IDS* en español.

Sea A una matriz $n \times n$ tal que $A([k],[k]) > 0$ para $k \in [n]$.
[§2.4 p.51, Pinkus] explica como calcular matrices $I, D, S \in \mathbb{R}^{n^2}$ (donde I es una matriz triangular inferior, D una matriz diagonal y S una matriz triangular superior) tal que

$$A = IDS.$$

Si el determinante de A es uno, es decir $A \in SL_n(\mathbb{R})$, entonces también $\det(I) = \det(D) = \det(S) = 1$.

Lema de separación

Lema (Cryer 1973)

Sea $A \in SL_n(\mathbb{R})$. Entonces A es totalmente no-negativa si y solo si A tiene una descomposición

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

tal que todas las matrices en el lado derecho son totalmente no-negativas y unitarias.

Matrices primarias

Las matrices en la descomposición (0.2) se pueden descomponer aún más, son productos de *matrices primarias*:

$$x_i(t) := 1 + tE_{i,i+1}, \quad y_i(t) = 1 + tE_{i+1,i},$$
$$z_i(t) := 1 + (t-1)E_{i,i} + (t^{-1} - 1)E_{i+1,i+1},$$

donde $E_{i,j}$ es la matriz con entrada 1 en la posición (i,j) y todos los demás 0, y 1 es la matriz de identidad (este resultado se llama el *Teorema de Loewner–Whitney*).

Intermezzo: álgebras de Lie

Las matrices $x_i(t), y_i(t)$ y $z_i(t)$ son muy relacionadas a las *generadores de Chevalley* del álgebra de Lie

$$\mathfrak{sl}_n = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \mathrm{tr}(A) = \sum_{i\in[n]} a_{i,i} = 0\}.$$

Más precisamente, los generadores de Chevalley son las siguientes matrices

$$e_i = E_{i,i+1}, \quad f_i = E_{i+1,i}, \quad h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} \in \mathfrak{sl}_{\mathfrak{n}}.$$

Intermezzo: álgebras de Lie

Las matrices $x_i(t), y_i(t)$ y $z_i(t)$ son muy relacionadas a las *generadores de Chevalley* del álgebra de Lie

$$\mathfrak{sl}_n = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \mathrm{tr}(A) = \sum_{i\in[n]} a_{i,i} = 0\}.$$

Más precisamente, los generadores de Chevalley son las siguientes matrices

$$e_i = E_{i,i+1}, \quad f_i = E_{i+1,i}, \quad h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} \in \mathfrak{sl}_\mathfrak{n}.$$

Recuerda que el *exponencial de una matriz* A es definido

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} A^k$$

Ejercicio 5

Verifica que las exponenciales de las matrices e_i, f_i, h_i satisfacen para $t \in \mathbb{R}$

$$x_i(t) = \exp(te_i), y_i(t) = \exp(tf_i) \text{ y } z_i(e^t) = \exp(th_i).$$

Referencias

Pin A. Pinkus. Totally Positive Matrices. Cambridge University Press 2010

Kar S. Karlin. Total Positivity Volume I. Stanford University Press 1968

TPA Total Positivity and Its Applications. Editors: M. Hazewinkel (managing), M. Gasca, C.A. Micchelli. Springer: Mathematics and Its Applications Volume 359, 1996

Kod Y. Kodama. KP Solitons and the Grassmannians. SpringerBriefs in Mathematical Physics Volume 22, 2017