

Escuela de Matemáticas: Positividad Total

Lara Bossinger

Universidad Nacional Autónoma de México, Unidad Oaxaca

Enero 10 2022

Intermezzo: álgebras de Lie

Las matrices $x_i(t)$, $y_i(t)$ y $z_i(t)$ son muy relacionadas a las *generadores de Chevalley* del álgebra de Lie

$$\mathfrak{sl}_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{tr}(A) = \sum_{i \in [n]} a_{i,i} = 0\}.$$

Más precisamente, los generadores de Chevalley son las siguientes matrices

$$e_i = E_{i,i+1}, \quad f_i = E_{i+1,i}, \quad h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} \in \mathfrak{sl}_n.$$

Intermezzo: álgebras de Lie

Las matrices $x_i(t)$, $y_i(t)$ y $z_i(t)$ son muy relacionadas a las *generadores de Chevalley* del álgebra de Lie

$$\mathfrak{sl}_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{tr}(A) = \sum_{i \in [n]} a_{i,i} = 0\}.$$

Más precisamente, los generadores de Chevalley son las siguientes matrices

$$e_i = E_{i,i+1}, \quad f_i = E_{i+1,i}, \quad h_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} \in \mathfrak{sl}_n.$$

Recuerda que el *exponencial de una matriz* A es definido

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Ejercicio 1

Verifica que las exponenciales de las matrices e_i, f_i, h_i satisfacen para $t \in \mathbb{R}$

$$x_i(t) = \exp(te_i), \quad y_i(t) = \exp(tf_i) \quad \text{y} \quad z_i(t) = \exp(th_i).$$

Intermezzo: grupos algebraicos

Del resultado de Cryer en combinación con el Teorema de Lowener-Whitney viene la conexión a los grupos algebraicos donde se ubica el trabajo de Lusztig, Fomin y Zelevinsky.

Lusztig generalizó la noción de *matrices totalmente positivas* a otros grupos de Lie. Él inició el estudio de *la parte no-negativa* $G_{\geq 0}$ de un grupo G y probó que es un conjunto *semi-algebraico* (es decir que se puede describir como un conjunto que satisface desigualdades polinomiales $\Delta(x) \geq 0$, donde los Δ son elementos de la propia *base canónica dual* y en casos sencillos son *menores generalizados*).

Descomposición IDS y certificados de positividad

¿Cómo nos ayuda entonces la descomposición IDS en la búsqueda de matrices totalmente no-negativas?

Sea $G = SL_n$, entonces $G_{\geq 0}$ es un *semigrupo multiplicativo* [Corolario de Cauchy-Binet].

El [Lema de Cryer] implica que nos podemos enfocar en el subsemigrupo $N_{\geq 0}$ de matrices triangulares superiores no-negativas (o equivalentemente en los matrices triangulares inferiores no-negativas $N_{\geq 0}^-$).

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos sus menores:

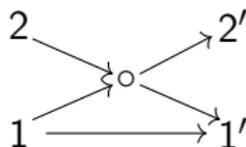
$$x, y, z, \quad y \quad \Delta = xz - y.$$

Entonces, $\Delta + y = xz$ y así obtenemos dos test de positividad $\{\Delta, y, x\}$ y $\{\Delta, y, z\}$. Como en el ejemplo anterior concluimos que la cardinalidad de los dos test es la dimensión de N y los test son eficientes.

§3 Objetos combinatorios asociados: redes planas y caminos

Redes planas

Una *red plana de orden n* es una gráfica plana orientada con $2n$ vértices marcados $1, \dots, n$ y $1', \dots, n'$, de los cuales i son fuentes y i' son pozos; con vértices interiores y aristas orientadas. Por ejemplo,



La *matriz de caminos* de una red plana de orden n es la matriz $W = (w_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ donde

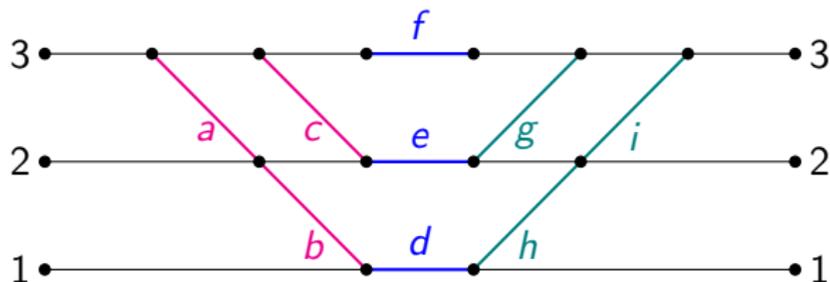
$$w_{ij} := \text{número de caminos de } i \text{ a } j'.$$

Ejercicio 2

Calcula la matriz de caminos del ejemplo. ¿Es totalmente positiva?

Ejemplo: red plana de orden 3

Consideramos la siguiente red plana Γ_0



Un *camino* en Γ_0 es de un vértice i en la izquierda a un vértice j en la derecha con la restricción que cada arista se puede atravesar solamente de la izquierda a la derecha. El *peso de un camino* es el producto de todos los pesos (a, \dots, i) de sus aristas (los pesos de las aristas sin etiqueta son 1).

Ejercicio: matrices de caminos y positividad

Ejercicio 3

- 1 *Calcula la matriz de caminos de Γ_0 , es decir, la matriz 3×3 cuya entrada a_{ij} es la suma de todos los pesos de caminos de i a j .*
- 2 *Muestra que la matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ es totalmente positiva si y solo si $a, \dots, i \in \mathbb{R}_{>0}$.*

De hecho, cada matriz 3×3 totalmente positiva es la matriz de caminos de la gráfica Γ_0 para alguna elección de pesos a, \dots, i .

§ Aplicación: ecuaciones de ondas

Una ecuación de ondas

La *ecuación de Kadomtsev y Petviashvili (KP)* es una ecuación diferencial parcial para describir el movimiento de onda no lineal. Para $u = u(x, y, t)$

$$(-4u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3u_{yy} = 0$$

Una ecuación de ondas

La *ecuación de Kadomtsev y Petviashvili (KP)* es una ecuación diferencial parcial para describir el movimiento de onda no lineal. Para $u = u(x, y, t)$

$$(-4u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3u_{yy} = 0$$

Generaliza la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) que es unidimensional (para $u = u(x, t)$ es $u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0$).

Una ecuación de ondas

La *ecuación de Kadomtsev y Petviashvili (KP)* es una ecuación diferencial parcial para describir el movimiento de onda no lineal. Para $u = u(x, y, t)$

$$(-4u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3u_{yy} = 0$$

Generaliza la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) que es unidimensional (para $u = u(x, t)$ es $u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0$).

Una clase de soluciones muy curiosa es la de *ondas solitarias*. Son ondas que viajan preservando su forma y su energía.

Ondas solitarias en agua de poca profundidad



De Mark J. Ablowitz en Nuevo Vallarta, Nayarit, México,
<https://sites.google.com/site/ablowitz/line-solitons>

Ondas solitarias en agua de poca profundidad



De Mark J. Ablowitz en Nuevo Vallarta, Nayarit, México,
<https://sites.google.com/site/ablowitz/line-solitons>

El cuento dice que fueron observados por primera vez de John Scott Russel en un canal de agua de poca profundidad en 1834 en Escocia.

Soluciones de ondas solitarias

Un *dato de un solitón* es una matriz $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ de rango completo y $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_n$ en \mathbb{R} .

Soluciones de ondas solitarias

Un *dato de un solitón* es una matriz $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ de rango completo y $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_n$ en \mathbb{R} . La *función τ* asociada es

$$\tau_A(x, y, t) = \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \Delta_I(A) \prod_{j < k} (\kappa_{i_j} - \kappa_{i_k}) e^{\Theta_I(x, y, t)},$$

con $\Delta_I(A)$ el determinante de la submatriz de A con columnas en I y $\Theta_I(x, y, t) = \sum_{i \in I} \kappa_i x + \kappa_i^2 y + \kappa_i^3 t$.

Soluciones de ondas solitarias

Un *dato de un solitón* es una matriz $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ de rango completo y $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_n$ en \mathbb{R} . La *función τ* asociada es

$$\tau_A(x, y, t) = \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \Delta_I(A) \prod_{j < k} (\kappa_{i_j} - \kappa_{i_k}) e^{\Theta_I(x, y, t)},$$

con $\Delta_I(A)$ el determinante de la submatriz de A con columnas en I y $\Theta_I(x, y, t) = \sum_{i \in I} \kappa_i x + \kappa_i^2 y + \kappa_i^3 t$. Cada dato de un solitón da una *solución de solitón* que es la función

$$u(x, y, t) = 2\partial_x^2 \ln(\tau_A).$$

Soluciones de ondas solitarias

Un *dato de un solitón* es una matriz $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ de rango completo y $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_n$ en \mathbb{R} . La *función τ* asociada es

$$\tau_A(x, y, t) = \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \Delta_I(A) \prod_{j < k} (\kappa_{i_j} - \kappa_{i_k}) e^{\Theta_I(x, y, t)},$$

con $\Delta_I(A)$ el determinante de la submatriz de A con columnas en I y $\Theta_I(x, y, t) = \sum_{i \in I} \kappa_i x + \kappa_i^2 y + \kappa_i^3 t$. Cada dato de un solitón da una *solución de solitón* que es la función

$$u(x, y, t) = 2\partial_x^2 \ln(\tau_A).$$

La solución es un *solitón de líneas* si $\Delta_I(A) \geq 0$ para cada $I \in \binom{[n]}{k}$. En este caso A corresponde a un elemento en *la Grassmanniana totalmente no negativa*.

La Grassmanniana totalmente no negativa

La Grassmanniana es el conjunto $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n) := \{V \subset \mathbb{R}^n : \dim_{\mathbb{R}} V = k\}$.

Cada $V \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ puede ser representado por una matriz $A_V \in \mathbb{R}^{k \times n}$ cuyas filas forman una base de V (expresado en la base estándar de \mathbb{R}^n).

La *Grassmanniana totalmente positiva (resp. no negativa)* $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)_{>0}$ (resp. $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)_{\geq 0}$) contiene las $V \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ tal que todos los k -menores de A_V es positivos (resp. no negativos) para algún A_V representando a V .

Ejercicio 4

Sea $A_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es $V \in \text{Gr}_2(\mathbb{R}^4)_{>0}$? ¿Cuál será un certificado de positividad para $\text{Gr}_2(\mathbb{R}^4)_{>0}$?

La gráfica de un solitón

Substituimos $x \rightarrow \frac{x}{\epsilon}$, $y \rightarrow \frac{y}{\epsilon}$ y $t \rightarrow \frac{t}{\epsilon}$ para un $\epsilon > 0$ muy pequeño.

La gráfica de un solitón

Substituimos $x \rightarrow \frac{x}{\epsilon}$, $y \rightarrow \frac{y}{\epsilon}$ y $t \rightarrow \frac{t}{\epsilon}$ para un $\epsilon > 0$ muy pequeño. El *límite tropical* es

$$f_A(x, y, t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon \ln(\tau_A)) = \max_{I \in \binom{[n]}{k}} (\Theta_I(x, y, t)).$$

La gráfica de un solitón

Substituimos $x \rightarrow \frac{x}{\epsilon}$, $y \rightarrow \frac{y}{\epsilon}$ y $t \rightarrow \frac{t}{\epsilon}$ para un $\epsilon > 0$ muy pequeño. El *límite tropical* es

$$f_A(x, y, t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon \ln(\tau_A)) = \max_{I \in \binom{[n]}{k}} (\Theta_I(x, y, t)).$$

Las *líneas de nivel* del solitón son capturadas en el conjunto

$$\mathcal{C}_t(A) = \{\text{parte del plano de } xy \text{ donde } f_A \text{ no es lineal}\}.$$

La gráfica de un solitón

Substituimos $x \rightarrow \frac{x}{\epsilon}$, $y \rightarrow \frac{y}{\epsilon}$ y $t \rightarrow \frac{t}{\epsilon}$ para un $\epsilon > 0$ muy pequeño. El *límite tropical* es

$$f_A(x, y, t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon \ln(\tau_A)) = \max_{I \in \binom{[n]}{k}} (\Theta_I(x, y, t)).$$

Las *líneas de nivel* del solitón son capturadas en el conjunto

$$\mathcal{C}_t(A) = \{\text{parte del plano de } xy \text{ donde } f_A \text{ no es lineal}\}.$$

La *gráfica del solitón* es $\mathcal{C}_t(A)$ encajada en un disco, olvidando su estructura métrica pero preservando su estructura topológica.

La gráfica de un solitón

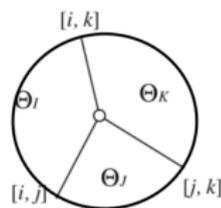
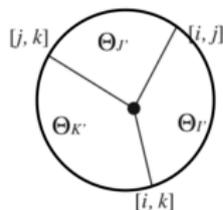
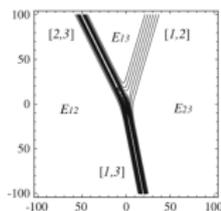
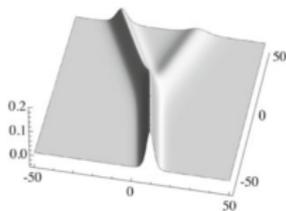
Substituimos $x \rightarrow \frac{x}{\epsilon}$, $y \rightarrow \frac{y}{\epsilon}$ y $t \rightarrow \frac{t}{\epsilon}$ para un $\epsilon > 0$ muy pequeño. El *límite tropical* es

$$f_A(x, y, t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon \ln(\tau_A)) = \max_{I \in \binom{[n]}{k}} (\Theta_I(x, y, t)).$$

Las *líneas de nivel* del solitón son capturadas en el conjunto

$$\mathcal{C}_t(A) = \{\text{parte del plano de } xy \text{ donde } f_A \text{ no es lineal}\}.$$

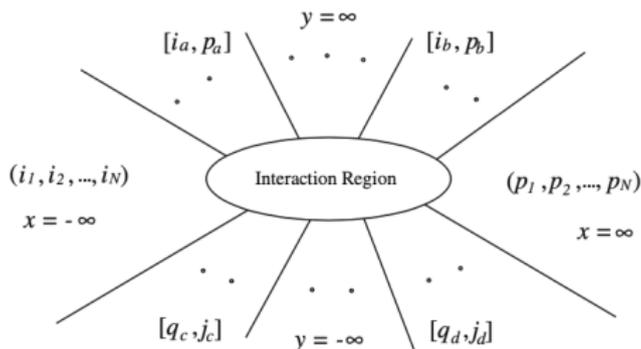
La *gráfica del solitón* es $\mathcal{C}_t(A)$ encajada en un disco, olvidando su estructura métrica pero preservando su estructura topológica.



Clasificación de solitones

Teorema

Sea $A \in Gr_k(\mathbb{R}^n)_{\geq 0}$ y $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_n$ en \mathbb{R} . Entonces, estos datos de solitón determinan de manera única una solución de solitón de líneas. Además la estructura asintótica de la gráfica del solitón se puede calcular a partir de los k -menores de la matriz A en su forma escalonada, sus elementos pivot $\{i_1, \dots, i_k\}$ y no pivot $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}$.



Referencias

- Pin** A. Pinkus. Totally Positive Matrices. Cambridge University Press 2010
- Kar** S. Karlin. Total Positivity Volume I. Stanford University Press 1968
- TPA** Total Positivity and Its Applications. Editors: M. Hazewinkel (managing), M. Gasca, C.A. Micchelli. Springer: Mathematics and Its Applications Volume 359, 1996
- Kod** Y. Kodama. KP Solitons and the Grassmannians. SpringerBriefs in Mathematical Physics Volume 22, 2017