

Tarea 1

Fecha de entrega: lunes, 14 de agosto 2023, 10:00 (por correo electrónico)

Fecha de discusión: viernes, 18 de agosto 2023, 14:30

1. Variedades afines en la topología Euclidea

Demuestra que cada variedad algebraica afín en $\mathbb{C}^n$ es un conjunto cerrado en la topología Euclidea.

2. Matrices unitarias complejas y reales

Identificamos el conjunto de matrices $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$ con $\mathbb{C}^{n^2}$. Las matrices *unitarias* en $\mathbb{C}^{n^2}$ son aquellos cuyas columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$, es decir satisfacen

$$\langle z, w \rangle = \bar{z} \cdot w^t = \sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i = 0,$$

donde $z = (z_1, \dots, z_n)^t$ y $w = (w_1, \dots, w_n)^t$ son columnas de una matriz, y $\bar{}$ es la conjugación compleja. Sea $U(n) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ el conjunto de las matrices unitarias.

- (a) Demuestra que $U(n) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ no es una variedad algebraica afín.
- (b) Demuestra que $U(n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ es el conjunto de ceros de una colección de polinomios con coeficientes reales.

3. Topología de Zariski

Demuestra las siguientes afirmaciones

- (a) La unión de dos variedades algebraicas afines en $\mathbb{A}^n$ es una variedad algebraica afín.
- (b) La topología de Zariski en $\mathbb{A}^2$ no coincide con la topología de producto en $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$.

Tipp: Considera la diagonal.

4. Morfismos de variedades algebraicas afines

Sea $F : V \rightarrow W$ un morfismo de variedades algebraicas afines. Verifica que F es una aplicación continua en la topología de Zariski.