

Tarea 10

Fecha de entrega: lunes, 23 de octubre 2023, 10:00 (por correo electrónico)

Fecha de discusión: viernes, 27 de octubre 2023, 14:30

1. El espacio tangente proyectivo

Una manera alternativa para definir el espacio tangente proyectivo en un punto p de una variedad proyectiva $V \subset \mathbb{P}^n$ es considerando una pieza afín $V \cap U$ que contiene p . Aquí $\mathbb{A}^n \cong U \subset \mathbb{P}^n$ es una carta afín de $\mathbb{P}^n$.

- (a) Demuestra que la cerradura proyectiva $\overline{T_p(V \cap U)}$ del espacio tangente $T_p(V \cap U)$ no depende de la carta afín U .

Recuerda la construcción del espacio tangente proyectivo: para $p \in V$ tomamos un representante $\tilde{p} \in \tilde{V}$ donde $\tilde{V} \subset \mathbb{A}^{n+1}$ es el cono afín de $V \subset \mathbb{P}^n$. El espacio tangente proyectivo es el cociente de $T_{\tilde{p}}\tilde{V}$ por la relación de equivalencia que identifica puntos en la misma línea por el origen.

- (b) Verifica que $\overline{T_p(V \cap U)}$ coincide con el espacio tangente proyectivo.
- (c) Si $\mathbb{I}(V)$ es generado por polinomios homogéneos $F_1, \dots, F_r$ demuestra que el espacio tangente proyectivo en p es

$$\mathbb{V}(dF_1|_p, \dots, dF_r|_p).$$

2. El haz tangente total

Sea $V \subset \mathbb{A}^n$ una variedad afín suave¹ de dimensión d . Definimos el *haz tangente total*

$$TV = \{(p, y) : p \in V, y \in T_p V\} \subset V \times \mathbb{A}^n \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$$

Con la proyección $TV \rightarrow V$ obtiene la estructura de un haz vectorial de rango d cuya fibra sobre un punto $p \in V$ es $T_p V$.

- (a) Demuestra que $TV \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ es un conjunto cerrado de Zariski y determina sus ecuaciones en términos de las ecuaciones de $V \subset \mathbb{A}^n$.

Si $V \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad proyectiva la construcción del *haz tangente proyectivo total* es análoga utilizando en espacio tangente proyectivo.

- (b) Demuestra que para $V \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva el haz tangente proyectivo total es una variedad proyectiva.

¹Una variedad afín $V \subset \mathbb{A}^n$ es *suave* si $\dim T_p V = \dim_p V$ para cada $p \in V$. Recuerde que para variedades equidimensionales (que incluye el caso de variedades irreducibles) $\dim_p V = \dim V$.