

Tarea 11

Fecha de entrega: lunes, 30 de octubre 2023, 10:00 (por correo electrónico)

Fecha de discusión: viernes, 3 de noviembre 2023, 14:30

1. El espacio de Zariski cotangente y el diferencial

Dado una variedad afín $X \subset \mathbb{A}^n$ y un punto $p \in X$ con ideal maximal $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_{p,X}$ definimos el *espacio de Zariski cotangente*

$$T_p^*X = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

- (a) Verifica que el espacio dual $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ es el espacio tangente.

Sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo de variedades afines $X \subset \mathbb{A}^n$ y $Y \subset \mathbb{A}^m$ y $f^* : \mathcal{O}_{f(p),Y} \rightarrow \mathcal{O}_{p,X}$ el homomorfismo inducido por el pull-back.

- (b) Demuestra que f^* induce una aplicación lineal entre los espacios cotangente. Su dual se llama el *diferencial de f* .
- (c) Si f está definido por $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[X]$ verifica que el diferencial de f coincide con la aplicación definida por la Jacobiana.

2. El blow up (explosión) de una singularidad

Considere $Y = \mathbb{V}(x^2 + 2xy + y^2 - x^5) \subset \mathbb{A}^2$.

- (a) Demuestre que Y es singular en el origen ¿es singular en otro punto?
- (b) Explote $\mathbb{A}^2$ en el origen y calcule la intersección de la transformada estricta de Y con el locus excepcional del blow up.
- (c) ¿Es dicha transformada estricta de Y no singular?