

Tarea 2

Fecha de entrega: lunes, 21 de agosto 2023, 10:00 (por correo electrónico)

Fecha de discusión: viernes, 25 de agosto 2023, 14:30

1. La Dimensión de una variedad algebraica afín

Verifica las siguientes afirmaciones:

- (a) La dimensión es una invariante de la clase de isomorfismo de una variedad algebraica afín.
- (b) Dado un morfismo sobreyectivo $X \rightarrow Y$ de dos variedades algebraicas afines tenemos

$$\dim X \geq \dim Y.$$

- (c) Una hipersuperficie en $\mathbb{A}^n$ es irreducible si y solo si es el conjunto de ceros de una polinomio $F \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ que es una potencia de un polinomio *irredible* G , es decir G no es el producto de dos polinomios no constantes.

2. Recordatoria del Álgebra Conmutativa

- (a) Sea $I \subset S$ un ideal y $\sigma : R \rightarrow S$ un homomorfismo de anillos. Demuestra que σ induce un homomorfismo inyectivo $R/\sigma^{-1}(I) \rightarrow S/I$. Deduce que I es primo si y solo si $\sigma^{-1}(I)$ es primo.
- (b) Sea R un $\mathbb{C}$ -álgebra y $I \subset R$ un ideal. Entonces la aplicación cociente $R \rightarrow R/I$ es un homomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras.

3. El Teorema de la base de Hilbert

- (a) Demuestra que cada variedad algebraica afín es la intersección de un número finito de hipersuperficies.
- (b) Sea S_3 el grupo de permutaciones de $[3] = \{1, 2, 3\}$. S_3 actúa en $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ permutando las variables. ¿Cuál es el anillo de polinomios invariantes bajo la acción?

4. Hilbert Nullstellensatz

Demuestra las siguientes afirmaciones

- (a) Ideales primos corresponden a variedades irreducibles.
- (b) La dimensión de una variedad algebraica afín es finita.
- (c) Un ideal radical en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ es la intersección de todos los ideales maximales que lo contienen.