

Tarea 3

Fecha de entrega: lunes, 28 de agosto 2023, 10:00 (por correo electrónico)

Fecha de discusión: viernes, 1 de septiembre 2023, 14:30

1. El anillo de coordenadas

- (a) Verifica que el anillo de coordenadas de una variedad algebraica afín es una $\mathbb{C}$ -álgebra reducida y finitamente generada.
- (b) Recuerda que un ideal radical en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ es la intersección de todos los ideales maximales que lo contienen. Demuestra que lo mismo es válido para ideales radicales en $\mathbb{C}[V]$ donde $V \subset \mathbb{A}^n$ es una variedad algebraica afín.

2. Equivalencia entre Álgebra y Geometría

Sea $F : V \rightarrow W$ un morfismo de variedades algebraicas afines. Verifica las siguientes afirmaciones.

- (a) El pullback $F^\# : \mathbb{C}[W] \rightarrow \mathbb{C}[V]$ es inyectivo si y solo si $F : V \rightarrow W$ es *dominante*, es decir $F(V) \subset W$ es denso.
- (b) El pullback $F^\# : \mathbb{C}[W] \rightarrow \mathbb{C}[V]$ es sobreyectivo si y solo si $F : V \rightarrow W$ define un isomorfismo entre V y una subvariedad de W .
- (c) Si $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ es un isomorfismo entonces el *determinante de Jacobi*

$$\det \left(\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j \in [n]} \right)$$

es un polinomio no constante. La converso es la famosa *conjetura de Jacobi* que sigue abierta.