

Tarea 4

Fecha de entrega: lunes, 4 de septiembre, 10:00 (por correo electrónico)

Fecha de discusión: viernes, 8 de septiembre 2023, 14:30

1. El espectro de un anillo

Sea R un anillo conmutativo finitamente generado.

- (a) Verifica que $\text{Spec}(R)$ es un espacio topológico.
- (b) Demuestra que $p \in \text{Spec}(R)$ es un punto cerrado si y solo si $p \subset R$ es un ideal maximal.
- (c) Verifica que

$$\max\text{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(p) : p \in \mathbb{Z} \text{ es primo}\}$$

y que $(0) \in \text{Spec}(\mathbb{Z})$ es un punto denso, es decir está contenido en cualquier conjunto abierto no vacío.

- (d) Sea $R = \mathbb{C}[x, y]/(x^2)$. Demuestra que $\max\text{Spec}(R)$ es homeomorfo a $\mathbb{A}^1$.

2. La dimensión de Krull

Sea A un álgebra finitamente generada y $S \subset A$ un conjunto generador. En la clase verificamos que

$$\dim(A) \leq \sup\{|T| : T \subset S \text{ finito y algebraicamente independiente}\}.$$

Demuestra que para cada campo k se cumple $\dim(k[x_1, \dots, x_n]) = n$ y

$$\dim(k^n) = \begin{cases} n & \text{si } k \text{ es infinito} \\ 0 & \text{si } k \text{ es finito} \end{cases}$$