

Tarea 5

Fecha de entrega: lunes, 18 de septiembre 2023, 10:00 (por correo electrónico)

Fecha de discusión: viernes, 22 de septiembre 2023, 14:30

1. Variedades proyectivas son compactas

Demuestra lo siguiente:

- (a) Cada variedad proyectiva en $\mathbb{P}^n$ es compacto en la topología Euclidea.
- (b) Cada variedad proyectiva es la compactificación de una variedad afín en la topología de Zariski y también en la topología Euclidea.

2. Topología de Zariski en variedades proyectivas

- (a) Encuentra una biyección entre el conjunto de polinomios homogéneos en dos variables de grado d y el conjunto de polinomios en una variable de grado d .
- (b) Con (a) demuestra que la topología de Zariski en las piezas afines $V \cap \mathbb{A}^2$ de una variedad proyectiva $V \subset \mathbb{P}^2$ es una topología en V que coincide con la topología de Zariski en V .
- (c) Generaliza (b) al caso de $V \subset \mathbb{P}^n$.

3. La curva cúbica torcida

Sea $V = \mathbb{V}(x^2 - y, x^3 - z) \subset \mathbb{A}^3$ la curva cúbica torcida.

- (a) Demuestra que $\mathbb{I}(V) = (y - x^2, z - xy)$.
- (b) Homogeniza los generadores $y - x^2$ y $z - xy$ con respecto a w en $\mathbb{C}[x, y, z, w]$ y que sus homogenizaciones definen a la cerradura proyectiva $\bar{V} \subset \mathbb{P}^3$ pero el ideal generado de las homogenizaciones no es radical.
- (c) Demuestra que la homogenización de un ideal radical es radical.