

Tarea 7

Fecha de entrega: lunes, 2 de octubre 2023, 10:00 (por correo electrónico)

Fecha de discusión: viernes, 6 de octubre 2023, 14:30

1. Anillos graduados y el espectro proyectivo

Un anillo R es *graduado* si es una suma directa $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R_n$ de grupos abelianos aditivos que cumplen $R_n R_m \subseteq R_{n+m}$. El *ideal irrelevante* de un anillo graduado R es $R_+ := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} R_n$. Definimos el *espectro proyectivo* de R

$$\text{Proj}(R) := \{\mathfrak{p} \subset R \text{ ideal primo homogéneo}\}.$$

- (a) Sea $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal homogéneo. Verifica que el cociente $R := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ es un anillo graduado.
- (b) Dado un anillo graduado R y $I \subset R$ un ideal homogéneo definimos

$$\mathbb{V}(I) := \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(R) : I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Verifica que los conjuntos $\mathbb{V}(I)$ forman los conjuntos cerrados de una topología de Zariski en $\text{Proj}(R)$.

- (c) Demuestra que el conjunto de puntos cerrados en $\text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n])$ es el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$.

2. Anillo de coordenadas de una variedad afín abstracta

Sea V una variedad afín abstracta (es decir, una variedad casi-proyectiva que es isomorfa como variedad casi-proyectiva a una variedad afín). El anillo de coordenadas de V es el anillo de coordenadas de un cerrado $W \subset \mathbb{A}^n$ que admite un isomorfismo $F : V \rightarrow W$.

Verifica que el anillo de coordenadas está bien definido, es decir que no depende ni del isomorfismo F , ni de W .

3. Anillo local de gérmenes

Definimos una relación de equivalencia en el conjunto de gérmenes de una variedad casi-proyectiva: sean (U, f) y (U', g) gérmenes de funciones regulares en V . Entonces, identificamos (U, f) y (U', g) si

$$f|_{U \cap U'} = g|_{U \cap U'}.$$

- (a) Demuestra que funciones regulares son continuas y utiliza este hecho para verificar que lo definido es una relación de equivalencia.
- (b) Recuerda que $\mathcal{O}_p := \mathcal{O}_{p,V}$ denota el conjunto de gérmenes de funciones regulares en $p \in V$. Verifica que $\mathcal{O}_p$ es un anillo local con campo residual $\mathcal{O}_p/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$.