Curso básico de Geometría Algebraica, semestre 2024-1, Posgrado de la UNAM
Lara Bossinger y Montserrat Vite

Tarea 8

Feche de entrega: lunes, 9 de octubre 2023, 10:00 (por correo electrónico)
Fecha de discusión: viernes, 13 de octubre 2023, 14:30

1. **El producto de variedades**

   Sean X y Y variedades proyectivas. Demuestra que su producto (la imagen bajo la aplicación de Segre) es una variedad proyectiva y expresa las ecuaciones que lo determinan en términos de las ecuaciones que definen a X y Y, respectativamente.

2. **Filtración de módulos graduados**

   Sea $S = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ y M un S-modulo. Recuerda que M es *graduado* si $M = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} M_d$ y $S_i M_j \subset M_{i+j}$. Una *filtración prima* de M es una secuencia de submodulos graduados

   $$\{0\} = M^0 \subseteq M^1 \subseteq \cdots \subseteq M^r = M$$

   que cumple $M^i/M^{i-1} = S/\mathfrak{p}_i[\ell_i]$ donde $\mathfrak{p}_i \subset S$ es un ideal primo homogéneo y $[\ell_i]$ denote la traslación de la graduación por $\ell_i \in \mathbb{Z}$ (es decir, si $f \in S$ es de grado d su clase en $S/\mathfrak{p}_i[\ell_i]$ es de grado $d + \ell_i$). Sea $M' \subset M$ el submodulo graduado maximal de M que admite una filtración prima. Definimos $\mathcal{I} = \{I_m := \mathrm{Ann}(m) : m \in M/M' \text{ homogéneo y no cero}\}$, donde $\mathrm{Ann}(m) = \{s \in S : sm = 0\}$.

   (a) Verifica que los ideales I_m son homogéneos y que los elementos maximales de $\mathcal{I}$ son ideales primos y que los submodulos que generan los $m \in M/M'$ asociados son de la forma $S/I_m[-\ell]$ donde $\ell = \deg(m)$.

   (b) Utilizando (a) demuestra que M admite una filtración prima.

   (c) Sea $(M^i)_{i=0,\ldots,r}$ una filtración prima de M y $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ los ideales primos homogéneos asociados Demuestra que $\mathfrak{p} \supseteq \mathrm{Ann}(M)$ si y solo si existe un i con $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_i$. Es decir, los $\mathfrak{p}_i$ minimales son los *ideales primos minimales* de M.

   (d) Para cada primo minimal $\mathfrak{p}$ de M verifica que la multiplicidad de $\mathfrak{p}$ en $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ coincide con la longitud de la localización $M_{\mathfrak{p}}$ con respecto al anillo local $S_{\mathfrak{p}}$.

3. **Variedades lineales en $\mathbb{P}^n$**

   Recuerda que una hipersuperficie definida por un polinomio lineal (homogéneo) se llama un *hiperplano*.

   (a) Verifique que las siguientes afirmaciones son equivalentes para una variedad $V \subset \mathbb{P}^n$.

      i. $\mathbb{I}(V)$ tiene un conjunto generador que consiste de polinomios lineales.

      ii. V se puede expresar como la intersección de hiperplanos en $\mathbb{P}^n$.

      En este caso V se llama una *variedad lineal*.

   (b) Si $V \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad lineal de dimensión r demuestra que $\mathbb{I}(V)$ es generado de manera minimal por $n - r$ polinomios lineales. En particular, variedades lineales son *intersecciones completas*.