Cada dos de los generadores definen una variedad reducible: V con una línea.

$\rightsquigarrow$ V no es una "intersección completa"

Definición: Una variedad proyectiva $V \subset \mathbb{P}^n$ es intersección completa si $\mathbb{I}(V)$ tiene un conjunto generador de cardinalidad $\operatorname{codim} V$.

Es decir, V es la intersección de $\operatorname{codim} V$ tantos hipersuperficies.

Definición: Una variedad proyectiva $V \subset \mathbb{P}^n$ es intersección completa como conjunto (set theoretically) si es la intersección de $\operatorname{codim} V$ tantos hipersuperficies

$\hookrightarrow$ no pedimos que los hipersuperficies correspondan a un conjunto generador del ideal radical homogéneo $\mathbb{I}(V)$.

Ejemplo: En la Tarea 5.3 vimos que la cerradura proyectiva de la curva cúbica torcida es

$$\mathbb{V}(yw - z^2) \cap \mathbb{V}(xw - yz) = V \subset \mathbb{P}^3$$

pero $(yw - z^2, xw - yz) \neq \mathbb{I}(V)$

$$\mathbb{I}(V) = (yw - z^2, xw - yz, y^2 - xz)$$

$\Rightarrow$ V es intersección completa como conjunto, pero no es intersección completa.

Problema abierto: Dado una variedad proyectiva determina si es isomorfa a una intersección completa.

En caso de intersecciones completas nuestra idea naiv de calcular el grado si funciona. Tenemos

Teorema Si $V = \mathbb{V}(F_1, \dots, F_c)$ es intersección completa entonces, $\deg(V) = \deg F_1 \cdots \deg F_c$

Prueba: Shafarevich "Basic Algebraic Geometry" 1974 p. 198

↳ utiliza las bases de la teoría de intersección.

Un caso especial es el siguiente resultado clásico de Bézout:

Teorema de Bézout

Consideramos dos curvas en $\mathbb{P}^2$ determinadas por dos polinomios de grado d y e, respectativamente.
Si los polinomios no tienen componentes en común la intersección de las curvas consiste de $d \cdot e$ puntos.
Si las curvas no son tangentes en ninguno de sus puntos de intersección, entonces los $d \cdot e$ puntos son distintos.

Para la prueba vamos a usar una definición algebraica del grado.

§ Función de Hilbert [Hartshorne, § 7]

Recuerda que para $V \subset \mathbb{P}^n$ su anillo de coordenadas homogeneas es $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] / \mathbb{I}(V)$ sea $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$

$\mathbb{I}(V)$ es homogéneo $\Rightarrow$ $\mathbb{C}[V] = \bigoplus_{i \geq 0} \mathbb{C}[V]_i$ es graduado

Def: La función de Hilbert de un S-modulo graduado M es $\varphi_M : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con $\varphi_M(\ell) = \dim M_\ell$.

Teorema [Hilbert - Serre]

Sea M un S-modulo finitamente generado y graduado.
Entonces existe un unico polinomio $P_M(z) \in \mathbb{Q}[z]$ t.q.

$$P_M(\ell) = \varphi_M(\ell) \qquad \forall \quad \ell \gg 0$$

Además, $\deg P_M(z) = \dim \mathbb{V}(\operatorname{Ann} M) \subset \mathbb{P}^n$

$\hookrightarrow \{ s \in S : sM = 0 \} \subset S$ ideal

Prueba: [Hartshorne, I.7.5] Alg. conmut.

Def: P_M se llama el polinomio de Hilbert de M.
Si $V \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad proyectiva su polinomio de Hilbert es $P_V := P_{\mathbb{C}[V]}$

Corolario: $\deg P_V(z) = \dim V \quad (:= \dim \mathbb{C}[V] - 1)$

Prueba: $\operatorname{Ann} \mathbb{C}[V] = \mathbb{I}(V)$

Def: Sea $V \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva de dimensión r.
Entonces, definimos su grado algebraico $\deg_{alg} V$ como $r!$ multiplicado por el coeficiente principal de P_V.

Proposición:

(a) Si $\emptyset \neq V \subset \mathbb{P}^n$ entonces $\deg_{alg} V \in \mathbb{Z}_{>0}$

(b) Sea $V = V_1 \cup V_2$ con $\dim V_1 = \dim V_2$ y $\dim (V_1 \cap V_2) < \dim V$

$$\Rightarrow \deg_{alg} V = \deg_{alg} V_1 + \deg_{alg} V_2$$

(c) $\deg_{alg} \mathbb{P}^n = 1$

(d) Si $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ es homogéneo de grado d, entonces

$$\deg_{alg} \mathbb{V}(F) = d = \deg \mathbb{V}(F).$$

Prueba: $V \neq \emptyset \overset{\text{Hilbert}}{\underset{\text{Serre}}{\Rightarrow}} P_V$ es polinomio no cero de grado $r = \dim V$

P_V es un polinomio numerico (i.e. $P_V(n) \in \mathbb{Z} \; \forall \; n \gg 0$)
Eso implica que existen $c_0, \dots, c_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$P_V(z) = c_0\binom{z}{r} + c_1\binom{z}{r-1} + \dots + c_r$$

En particular, $c_0 \neq 0$ es el coeficiente principal y por definición $\deg_{alg} V = c_0 r! \in \mathbb{Z}_{>0}$.

(b) Tarea

(c) Ejercicio: Calcula $\varphi_S(\ell)$ con $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ y $P_{\mathbb{P}^n}$.

$$\varphi_S(\ell) = \binom{n+\ell}{n} \Rightarrow P_{\mathbb{P}^n} = \binom{z+n}{n} = \frac{1}{n!}\left((z+n)(z+n-1)\cdots(z-1)z\right) \Rightarrow \deg \mathbb{P}^n = 1.$$

(d) Sea $f \in S$ homogéneo de grado d. Tenemos una secuencia corta exacta

$$0 \longrightarrow S[-d] \xrightarrow{f} S \longrightarrow S/(f) \longrightarrow 0$$

trasladar el grado por $-d$

$S(d)_m = S_{m-d}$

$$\Rightarrow \varphi_{S/(f)}(\ell) = \varphi_S(\ell) - \varphi_S(\ell - d)$$

Entonces, para $H = V(f)$ tenemos

$$P_H(z) = \underbrace{\binom{z+n}{n}}_{P_{\mathbb{P}^n}(z)} - \underbrace{\binom{z-d+n}{n}}_{P_{\mathbb{P}^n}(z-d)} = \frac{d}{(n-1)!} z^{n-1} + \dots$$

$$\Rightarrow \deg_{alg} H = d = \deg H \qquad \square$$

En lo que sigue vamos a usar el siguiente Teorema sin prueba [Hartshorne I.7, p. 48/49]