$$P_V(z) = c_0 \binom{z}{r} + c_1 \binom{z}{r-1} + \dots + c_r$$

En particular, $c_0 \neq 0$ es el coeficiente principal y por definición $\deg_{alg} V = c_0 r! \in \mathbb{Z}_{>0}$.

(b) Tarea

(c) Ejercicio: Calcula $\varphi_S(\ell)$ con $S = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ y $P_{\mathbb{P}^n}$.

$\varphi_S(\ell) = \binom{n+\ell}{n} \Rightarrow P_{\mathbb{P}^n} = \binom{z+n}{n} = \frac{1}{n!}\left((z+n)(z+n-1)\cdots(z-1)z\right) \Rightarrow \deg \mathbb{P}^n = 1$.

(d) Sea $f \in S$ homogéneo de grado d. Tenemos una secuencia corta exacta

$$0 \longrightarrow S[-d] \xrightarrow{f} S \longrightarrow S/(f) \longrightarrow 0$$

trasladar el grado por $-d$

$S(d)_m = S_{m-d}$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{S/(f)}(\ell) = \varphi_S(\ell) - \varphi_S(\ell - d)$$

Entonces, para $H = \mathbb{V}(f)$ tenemos

$$P_H(z) = \underbrace{\binom{z+n}{n}}_{P_{\mathbb{P}^n}(z)} - \underbrace{\binom{z-d+n}{n}}_{P_{\mathbb{P}^n}(z-d)} = \frac{d}{(n-1)!} z^{n-1} + \dots$$

$$\Rightarrow \deg_{alg} H = d = \deg H \quad \square$$

En lo que sigue vamos a usar el siguiente Teorema sin prueba [Hartshorne I.7, p. 48/49]

Teorema de la dimensión

Afín Sean $Y, Z \subset \mathbb{A}^n$ variedades afines de dimensiones r, s. Entonces cada componente irreducible W de $Y \cap Z$ tiene dimensión $\geq r+s-n$.

Proyectivo

Sean $Y, Z \subset \mathbb{P}^n$ variedades proyectivas de dimensiones r, s. Entonces cada componente irreducible de $Y \cap Z$ tiene dimensión $\geq r+s-n$. Si $r+s-n \geq 0 \Rightarrow Y \cap Z \neq \emptyset$.

Consideramos $Y \subset \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva de dimensión r y $H \subset \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie con $Y \not\subset H$.
Entonces, con el Teorema de la dimensión concluimos

$$Y \cap H = Z_1 \cup \dots \cup Z_s \quad \text{con } \dim Z_i = r-1$$

Sea $p_j = \mathbb{I}(Z_j) \subset S$ y $M := S/\mathbb{I}(Y) + \mathbb{I}(H)$

$\Rightarrow$ M es S-modulo graduado y finitamente generado

Recuerda de Álgebra conmutativa: existe una filtración (no única)

$$0 = M^0 \subseteq M^1 \subseteq \dots \subseteq M^r = M$$

traslación de grado

de submodulos graduados t.q. $\forall i$ $\quad M^i/M^{i-1} \cong S/p_i\,[l_i]$

donde $p_i \subset S$ ideal primo homogéneo y $l_i \in \mathbb{Z}$.

Además,

- Si $p \subset S$ primo homogéneo: $\quad p \supseteq \mathrm{Ann}(M) \Leftrightarrow p \supseteq p_j$ algún j
  $\hookrightarrow$ p_j son los primos asociados minimales de M
  minimales ie primos minimales que contienen Ann(M)
- $\#\{j : p = p_j\} = \mathrm{length}_{S_p}(M_p) =: \mu_p(M)$ la multiplicidad de p en M

  longitud de una cadena minimal de submodulos con cocientes simples: $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n$ con M_i/M_{i+1} simple

Nota que $p_j = \mathbb{I}(Z_j) \supset \mathbb{I}(Y) + \mathbb{I}(H)$

$\Rightarrow$ p_j es primo asociado minimal de M

Definición La multiplicidad de intersección de Y y H a lo largo de Z_j es

$$i(Y, H; Z_j) = \mu_{p_j}\left(S/\mathbb{I}(Y) + \mathbb{I}(H)\right)$$

Teorema: Sea $Y \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva de dimensión ≥ 1 y $H \subset \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie, $H \not\supset Y$. Sean $Z_1, \dots, Z_s$ las componentes irreducibles de $Y \cap H$. Entonces,

$$\sum i(Y, H; Z_j) \cdot \deg(Z_j) = (\deg Y)(\deg H)$$

Prueba: Sea $H = \mathbb{V}(F)$, $F \in S_d$. Tenemos SEC de mod. grad.

$$0 \to S/\mathbb{I}(Y)[-d] \xrightarrow{F} S/\mathbb{I}(Y) \to M \to 0$$

donde $M = S/\mathbb{I}(Y) + \mathbb{I}(H)$. En particular, para los polinomios de Hilbert observamos

$$P_M(z) = P_Y(z) - P_Y(z-d) \qquad ☆$$

comparamos los coeficientes principales de ambos lados: Y es de dimensión r y de grado d, entonces

$$P_Y(z) = \frac{e}{r!} z^r + \dots$$

Entonces, de lado derecho en ☆ tenemos

$$\frac{e}{r!} z^r + \dots - \left(\frac{e}{r!}(z-d)^r + \dots \right) = \frac{de}{(r-1)!} z^{r-1} + \dots$$

Para el lado izquierdo de ☆ recuerda que M tiene una filtración de S-modulos graduados

$$0 = M^0 \subseteq M^1 \subseteq \dots \subseteq M^\ell = M \quad \text{con} \quad M^i/M^{i-1} \cong S/q_i\,[\ell_i]$$

$$\Rightarrow \quad P_M = \sum_{i=1}^{\ell} P_i \quad \text{con} \quad P_i := P_{S/q_i[\ell_i]}$$

Si $\mathbb{V}(q_i) \subset \mathbb{P}^n$ es de dimensión r_i y grado f_i tenemos

$$P_{\mathbb{V}(q_i)} = \frac{f_i}{r_i!} z^{r_i} + \dots$$

Observa que la traslación de ℓ_i no afecta al coeficiente principal, entonces $P_i = \frac{f_i}{r_i!} z^{r_i} + \dots$

Además, podemos ignorar todos los P_i que son de grado $< r-1$ (solo queremos saber el coef. principal).

$\Rightarrow$ los P_i que quedan corresponden a los primos minimales q_i de M que corresponden a los Z_j y aparecen con multiplicidad $\mu_{q_i}(M)$. Entonces, el coef. principal de P_M es

$$\frac{1}{(r-1)!} \sum_{j=1}^{s} \iota(Y,H;Z_j) \deg(Z_j) \qquad \square$$

Como Corolario obtenemos el Teorema de Bézout:

Corolario Sean $Y, Z \subset \mathbb{P}^2$ dos curvas proyectivas distintas de grados d y e. Sea $Y \cap Z = \{q_1, \dots, q_s\}$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{s} \iota(Y,Z;q_j) = de$$

Prueba: Un punto q_j tiene polinomio de Hilbert 1 pues $S/m_j \cong \mathbb{C}$. Ahora aplica el Teorema anterior.

$m_j \longrightarrow$ ideal maximal de q_j

Ejemplo: Sea $Y = \mathbb{V}(xz-y^2) \subset \mathbb{P}^2$ y $H = \mathbb{V}(x-z)$

$$\mathbb{I}(Y) + \mathbb{I}(H) = (x-z, x^2-y^2) \text{ no es primo}$$

$$Y \cap H = \underbrace{\mathbb{V}(x-z, x-y)}_{Z_1} \cap \underbrace{\mathbb{V}(x-z, x+y)}_{Z_2}$$

Z_1 y Z_2 son variedades lineales ☆ $\Rightarrow \deg Z_i = 1$

☆ En la tarea verificaron que variedades lineales son intersecciones completas generadas por polinomios de grado 1

Tenemos entonces

$$\deg(Y)\deg(H) = \deg(xz-y^2)\deg(x-z) = 2$$

$$= \iota(Y,H;Z_1) + \iota(Y,H;Z_2)$$

$$\Rightarrow \iota(Y,H;Z_i) = 1.$$