[Harris "Algebraic Geometry - a first course"] §6 & 8

§ Ejemplos

Ejemplo 1: Grassmannianas

$G(k,n) := \{$ subespacios lineal de K^n con dim. $k\}$

Notaciones alternativas: $G(k,V)$ con V esp. lineal abstracto de dimn

$\mathbb{G}(k-1, n-1) = \{$ subesp. lin. en $\mathbb{P}^{n-1}$ de dim $k-1\}$

$\mathbb{G}(k-1, \mathbb{P}V)$

$\hookrightarrow$ todos describen el mismo conjunto

Dado V esp. vect. de dim. n y $W \subset V$ de dim k generado por $v_1, \dots, v_k$ asociamos

$$\lambda = v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \Lambda^k(V)$$

Cambio de la base de W cambia λ por un determinante no cero

$\Rightarrow$ λ está determinado bajo mult. escalar por W

Definimos
$$\varphi: Gr(k,V) \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k V) \cong \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$$

el encaje de Plücker de la Grassmanniana

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V $\Rightarrow$ $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ es una base de $\Lambda^k V$. Las coordenadas de $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$ son dados por la base dual: $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})^* =: p_{(i_1, \dots, i_k)}$

Explicito, sea $W \in G(k,V)$ con base $v_1, \dots, v_k$.
Asociamos $M_W \in K^{k \times n}$ expresando v_i en la base $\{e_j\}_j$.

$\Rightarrow$ $p_{(i_1, \dots, i_k)}(W) = \det(M_W|_{(i_1, \dots, i_k)})$ $k \times k$-menor de M con columnas $i_1, \dots, i_k$.

Teorema $Gr(k,n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ es un cerrado de Zariski.
Es decir, $G(k,n)$ es variedad proyectiva.

Proposición: Sea $\Phi \subset G(k,n)$ una subvariedad. Entonces,
$$\Psi = \bigcup_{\Lambda \in \Phi} \Lambda \subset \mathbb{P}^n \quad \text{es una variedad}$$

Prueba: Sea $\Sigma := \{(\Lambda, x) : x \in \Lambda\} \subset G(k,n) \times \mathbb{P}^n$. Observamos que Σ es una variedad proyectiva:
$$\Sigma = \{(v_1 \wedge \dots \wedge v_k, w) : \underbrace{v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge w}_{\in \Lambda^{k+1} V} = 0\}$$

Tenemos proyecciones
$$\begin{tikzcd} & \Sigma \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ G(k,n) & & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

y $\Psi = \pi_2(\pi_1^{-1}(\Phi)) \Rightarrow \Psi \subset \mathbb{P}^2$ es subvariedad. //

Definición Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva. Definimos la variedad de k-planos incidentes a X
$$\mathcal{C}_k(X) = \pi_1(\pi_2^{-1}(X)) \subset G(k,n)$$

§ La junta de dos variedades

Sean $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ dos variedades proyectivas disjuntas. Afirmamos que el conjunto $J(X,Y) \subset \mathbb{P}^n$ de líneas que juntan X y Y es una variedad proyectiva:

Sea $\mathcal{J}(X,Y) \subset G(1,n)$ el conjunto de líneas en $\mathbb{P}^n$ que juntan X y Y

$$\Rightarrow \quad \mathcal{J}(X,Y) = \mathcal{C}_1(X) \cap \mathcal{C}_1(Y) \subset G(1,n) \text{ es subvariedad}$$

Prop.
$$\Rightarrow \quad J(X,Y) = \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{J}(X,Y)} \Lambda \subset \mathbb{P}^n \text{ es subvariedad} \quad //$$

Más explícitamente, observa que
$$j : X \times Y \longrightarrow G(1,n)$$
$$(p,q) \longmapsto \overline{pq}$$
es regular si $X \cap Y = \emptyset$. Si $X \cap Y \neq \emptyset$ entonces
$$j : X \times Y \dashrightarrow G(1,n) \text{ es racional}$$

Tenemos $\mathcal{J}(X,Y) = \overline{\operatorname{im}(j)} \subset \mathbb{G}(1,n)$ la cerradura.

es biendefinida también si $X \cap Y \neq \emptyset$ y

$$\Rightarrow \quad J(X,Y) = \bigcup_{\Lambda \in \mathcal{J}(X,Y)} \Lambda \subset \mathbb{P}^n \text{ es subvariedad}$$

Ejercicio: Sean $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{P}^4$ dos planos

y sean $C_i \subset \Lambda_i$ dos curvas cónicas

$\Lambda_1: w_0 = w_1 = 0$ $\qquad\qquad$ $\Lambda_2: w_3 = w_4 = 0$

$C_1: w_2^2 = w_3 w_4$ $\qquad\qquad$ $C_2 \quad w_0^2 = w_1 w_2$

$$J(C_1, C_2) = \{ z \overset{*}{=} sx + ty \;:\; x \in C_1, y \in C_2, [s:t] \in \mathbb{P}^1 \}$$

Demuestra que $J(C_1, C_2)$ es una hipersuperficie cuártica en $\mathbb{P}^4$.

Calculo:

$$\begin{cases} z_0 = \quad ty_0 & z_3 = sx_3 \\ z_1 = \quad ty_1 & z_4 = sx_4 \\ \qquad z_2 = sx_2 + ty_2 & \\ x_2^2 = x_3 x_4 & y_2^2 = y_0 y_1 \end{cases}$$

hay que eliminar x_i, y_i, s, t

$$z_2^4 = (sx_2 + ty_2)^4$$

$$= s^4 x_2^4 + 4 s^3 x_2^3 t y_2 + 6 s^2 x_2^2 t^2 y_2^2 + 4 s x_2 t^3 y_2^3 + t^4 y_2^4$$

$$= \underline{z_3^2 z_4^2} + 4 st x_2 y_2 (z_3 z_4) + 6 z_3 z_4 z_0 z_1 + 4 st x_2 y_2 (z_0 z_1) + z_0^2 z_1^2$$

$$= z_3^2 z_4^2 + 6 z_3 z_4 z_0 z_1 + z_0^2 z_1^2 + 4 st x_2 y_2 (z_0 z_1 + z_3 z_4)$$

Nota: $z_2^2 = s^2 x_2^2 + 2 st x_2 y_2 + t^2 y_2^2$

$$= z_3 z_4 + 2 st x_2 y_2 + z_0 z_1$$

$$z_2^2 - z_0 z_1 - z_3 z_4 = 2 st x_2 y_2$$

$$= z_3^2 z_4^2 + 6 z_3 z_4 z_0 z_1 + z_0^2 z_1^2 + 2 (z_2^2 - z_0 z_1 - z_3 z_4)(z_0 z_1 + z_3 z_4)$$

en M2: Sea $R = k[x_i, y_i, z_i, s, t]$

$I_x = \mathbb{I}(C_1) \subset R$, $I_y = \mathbb{I}(C_2) \subset R$, $I_z = (*)$

Sea $J = I_x + I_y + I_z$ (checa que es saturado con resp. a s, t)

Entonces $\mathbb{I}(J(C_1, C_2)) = J \cap k[z_0, \dots, z_4]$