Tarea (1) Sea $F: V \to W$ un morfismo de variedades algebraicas afines. Muestra que F es continuo en la topología de Zariski

(2) Muestra que la cúbica torcida es isomorfa a la línea afín construyendo un isomorfismo explícito $\mathbb{A}^1 \to V$ (recuerda la parametrización de la cúbica torcida de la tarea anterior)

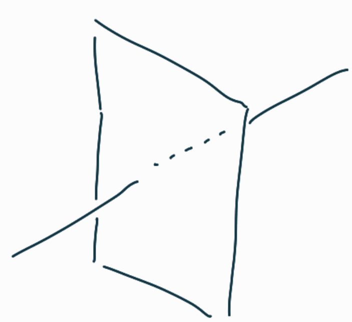
§ Dimensión: definición intuitiva

En la geometría algebraica el concepto de la dimensión se define de manera algebraica, pero antes de revisar este concepto a la profundidad desarrollamos la intuición geométrica que haya atrás:

Ejemplo (0) El espacio afín $\mathbb{A}^n$ tiene dimensión n

(1) La dimensión de la subvariedad $\mathbb{V}(x^2+y^2+z^2-1)$ en $\mathbb{A}^3$ es dos (se puede pensar como una esfera compleja de dim. 2)

(2) La variedad $\mathbb{V}(xy, xz)$ tiene dos componentes



¿Cuál es su dim.?

↳ vamos a fijar que tiene dim. 2

Definición: Variedades que no se pueden escribir como una unión no trivial de dos subvariedades son irreducibles.

Definición: La dimensión de una variedad V es la longitud de la cadena más larga de subvariedades propias irreducibles:

$$V = V_d \supsetneq V_{d-1} \supsetneq \cdots \supsetneq V_1 \supsetneq V_0$$

Ejemplo: $\dim \mathbb{A}^1 = 1$, tenemos $\{\text{linea}\} \supsetneq \{\text{punto}\}$

Por lo tanto, si V no es irreducible su dimensión es el máximo de las dimensiones de sus componentes. Si todas las componentes tienen la misma dimensión V se llama equidimensional.

Ejercicio: ¿Es irreducible/equidimensional V=V(xy-x^3-yw-wx^2,zx-x^4-wz-wx^3)?

La codimensión de una variedad $V \subset \mathbb{A}^n$ es

$$\operatorname{codim} V := n - \dim V$$

depende del espacio ambiente: una línea en $\mathbb{A}^2$ tiene codim. 1, en $\mathbb{A}^3$ tiene codim 2 etc.

La dimensión cerca de un punto $x \in V$ es la longitud maximal de cadenas de subvariedades irred. propias:

$$V = V_d \supsetneq V_{d-1} \supsetneq \cdots \supsetneq V_1 \supsetneq \{x\}$$

se escribe $\dim_x V$. Entonces,

$$\dim V = \sup\{\dim_x V : x \in V\}$$

Se puede mostrar que la dimensión en un punto es igual para cada punto si V es irreducible.

~~**Observación**~~ **Ejercicio**: La dimensión de $\mathbb{A}^n$ es al menos n.

Eso se puede ver considerando una cadena decreciente de subvariedades lineales. Para ver que es exactamente n se requiere más herramienta alg. de la teoría de dimensión.

Comentario: El concepto de dimensión esta de acuerdo con la dimensión de variedades en la geometría diferencial cada variedad algebraica contiene un conjunto abierto (por lo tanto denso) de Zariski de puntos suaves. Este mismo es una variedad compleja. Tenemos

$$\dim_{alg} V = \dim_{alg} V^{suave} = \dim_{cx} V^{suave}$$

dimensión compleja

dimensión en geometría algebraica

Tarea ① Muestra que la dimensión es una invariante de la clase de isomorfismo de una variedad.

② Dado un morfismo sobreyectivo $X \to Y$ de dos variedades algebraicas afines muestra que

$$\dim X \geq \dim Y$$

③ Muestra que una hipersuperficie en $\mathbb{A}^n$ es irreducible si y solo si es el conjunto de ceros de un polinomio F que es una potencia de un polinomio irreducible G

es decir, G no es el producto de dos polinomios no constantes.

El teorema de la base de Hilbert

En la definición de una variedad algebraica afín permitimos cualquier número de polinomios pero al final vamos a ver que es el conjunto de ceros de un número finito de polinomios gracias al trabajo de Noether:

Un anillo R es **Noetheriano** si todos sus ideales son finitamente generados.

Teorema de la base de Hilbert

Si R es un anillo Noetheriano, entonces $R[X]$ es Noetheriano.

Idea de la prueba:

Consideramos un ideal $J \subset R[X]$ y definimos $I_i \subset R$ como el ideal de elementos $a_i \in R$ tal que $\exists$

coeficiente principal

$$a_i x^i + \dots + a_1 x + a_0 \in J$$

Tenemos $I_0 \subset I_1 \subset \dots \quad (a_0 \in J \Rightarrow x a_0 \in J \Rightarrow a_0 \in I_1)$

Ejercicio: R Noetheriano $\Leftrightarrow$ cada cadena de ideales $I_0 \subset I_1 \subset \dots$ satisface $\exists\, r : I_r = I_{r+1} = \dots$

Para $i = 0, \dots, r$ fijamos generadores $a_{i1}, \dots, a_{in_i}$ para I_i y polinomios de grado i $F_{ij} \in J$ con coeficiente principal a_{ij}

Ejercicio: Por inducción sobre el grado de un elemento $f \in J$ demuestra que J es generado por $\{F_{ij} : \substack{0 \le i \le r \\ 0 \le j \le n_i}\}$

$\boxed{\text{Corolario: Si } R \text{ es Noetheriano} \Rightarrow R[x_1,\dots,x_n] \text{ lo es.}}$

Prueba: por inducción

En particular, $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ es Noetheriano porque $\mathbb{C}$ lo es (es un campo, en particular sus únicos ideales son (0) y (1).)

El teorema de base es fundamental en la geometría algebraica: sea $V \subset \mathbb{A}^n$ una variedad afín

Afirmación: $\mathbb{I}(V) := \{f \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n] : f(x) = 0 \ \forall x \in V\}$ es un ideal en $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$

Prueba: Si $f(x) = 0 = g(x) \ \forall x \in V \Rightarrow (f+g)(x) = 0$ y $\Rightarrow rf(x) = 0 \ \forall r \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ //

Tenemos entonces $V \subset \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$ (por definición)

$V \supset \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$: sea $x \in \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$ entonces $f(x) = 0 \ \forall f \in \mathbb{I}(V)$

Si V es el conjunto de ceros de $\{F_i\}_i$ entonces $F_i \in \mathbb{I}(V) \Rightarrow x \in \mathbb{V}(\{F_i\}_i) = V$

Por lo tanto $\boxed{\mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) = V}$

Corolario: Cada variedad afín algebraica $V \subset \mathbb{A}^n$ es el conjunto de ceros de un número finito de polinomios en $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$.

Prueba: $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ es Noetheriano $\Rightarrow \mathbb{I}(V)$ es finitamente generado: $\mathbb{I}(V) = (F_1,\dots,F_r)$

$\Rightarrow V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) = \mathbb{V}((F_1,\dots,F_r)) = \mathbb{V}(F_1,\dots,F_r)$ //

Tarea

① Muestra que cada variedad afín es una intersección de un número finito de hipersuperficies.

② Sea S_3 el grupo de permutaciones de $\{1, 2, 3\}$. S_3 actúa en $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ permutando las variables. ¿Cuál es el anillo de polinomios invariantes bajo la acción?

Hilbert Nullstellensatz – el teorema fundamental de la geometría algebraica

Ya vimos que dado $V \subset \mathbb{A}^n$ variedad afín se asocia un ideal

$$V \longmapsto \mathbb{I}(V)$$

también podemos empezar con un ideal $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ y asociar una variedad

$$I \longmapsto \mathbb{V}(I)$$

El Nullstellensatz nos dice que las dos construcciones son esencialmente inversas, más precisamente

Nullstellensatz (fuerte)

Para cada ideal $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tenemos

$$\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = \sqrt{I}$$

En particular, si I es radical: $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = I$