Ejemplo: Variedades secantes

En el caso especial de $X = Y \subset \mathbb{P}^n$ obtenemos lo siguiente

$$s: X \times X \dashrightarrow \mathbb{G}(1,n)$$
$$(p,q) \longmapsto \overline{pq}$$

es una aplicación racional biendefinida fuera de la diagonal $\Delta \subset X \times X$ y se llama la aplicación de líneas secantes. La cerradura de su imagen es la variedad de líneas secantes a X: $\mathcal{S}(X) \subset \mathbb{G}(1,n)$

Usando la proposición anterior obtenemos la variedad secante de X:

$$S(X) := \bigcup_{\ell \in \mathcal{S}(X)} \ell \quad \subset \mathbb{P}^n$$

A veces también se llama variedad cordal de X.

Ejercicio: Sea $C \subset \mathbb{P}^4$ la curva racional normal. Recuerda que $C = \operatorname{im}(\nu_4)$, donde

$$\nu_4 : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^4 \quad \text{es la aplicación de Veronese}$$
$$[s:t] \mapsto [s^4 : s^3t : s^2t^2 : st^3 : t^4]$$

P.D. $S(C) \subset \mathbb{P}^4$ es una hipersuperficie cúbica.

Macaulay2:

1. Construir el ideal $\mathbb{I}(C)$ es el núcleo del homomorfismo
$$\mathbb{Q}[z_0, z_1, z_2, z_3, z_4] \to \mathbb{Q}[s,t]$$
$$z_0 \mapsto s^4,\ z_1 \mapsto s^3t,\ z_2 \mapsto s^2t^2,\ z_3 \mapsto st^3,\ z_4 \mapsto t^4$$

2. Construir el ideal $\mathbb{I}(S(C))$
   - en $\mathbb{Q}[x_0, \dots, x_4, y_0, \dots, y_4, z_0, \dots, z_4, s, t]$ definimos
   $I_x = \mathbb{I}(C)$ en coord. x_i
   $I_y = \mathbb{I}(C)$ en coord. y_i — x y y representan puntos en C
   $I_z = (z_i - s x_i - t y_i)$ — puntos en $S(C)$ pertenecen a líneas secantes de C

- definimos

$$J = (I_x + I_y + I_z) : (s,t)^\infty$$

saturación con resp. a s,t para que $[s:t] \in \mathbb{P}^1$

representa la variedad $\{(x,y,z,[s:t]) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^1 : z = sx+ty\}$

y luego $\mathbb{I}(S(C)) = J \cap \mathbb{Q}[z_0, \dots, z_4]$

ideal obtenido eliminando las variables x_i, y_i, s, t corresponde a la proyección $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^4$

Comentario: Saturación de un ideal

Recorda para $I, J \subset k[x_0, \dots, x_n] = S$, tenemos el ideal colon o cociente

$$I : J = \{f \in S : fg \in I \ \forall g \in J\}$$

y la saturación de I respecto a J

$$I : J^\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} I : J^k$$

Sea $m = (x_0, \dots, x_n)$ tenemos la saturación de I

ideal irrelevante de S que no corresponde a ningún punto en $\mathbb{P}^n$

$$I : m^\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} I : m^k$$

Geometricamente

$$\mathbb{V}(I : J^\infty) = \overline{\mathbb{V}(I) \setminus \mathbb{V}(J)}$$

Además, dado un conjunto $\{F_1, \dots, F_r\} \subset S$ y una variedad $X \subset \mathbb{P}^n$ tenemos las siguientes relaciones:

1. $X = \mathbb{V}(F_1, \dots, F_r) \rightsquigarrow \{F_1, \dots, F_r\}$ define X como conjunto
2. $(F_1, \dots, F_r) : m^\infty = \mathbb{I}(X) \rightsquigarrow \{F_1, \dots, F_r\}$ define X como esquema
3. $(F_1, \dots, F_r) = \mathbb{I}(X) \rightsquigarrow \{F_1, \dots, F_r\}$ define X como variedad

Ejemplo: Scroll racional normal

↳ "desplazamiento"

Sean $k \leq l$ enteros positivos y $n = k+l+1$. Escogemos $\Lambda, \Lambda' \subset \mathbb{P}^n$ espacios lineales complementarios de dimensión k y l resp., i.e. $\Lambda \cap \Lambda' = \phi$ y Λ, Λ' generan $\mathbb{P}^n$.

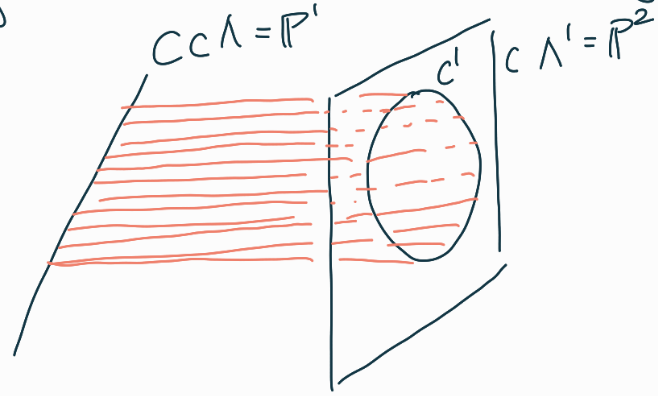
Sean $C \subset \Lambda$ y $C' \subset \Lambda'$ curvas racionales normales y $\varphi: C \to C'$ un isomorfismo.

Definimos

$$S_{k,l} = \bigcup_{p \in C} \overline{p\,\varphi(p)}$$

se llama el scroll racional normal y es una superficie reglada (ruled). Las líneas $\overline{p\varphi(p)}$ son las líneas que le dan la estructura de una superficie reglada (lines of the ruling)

Caricatura



$S_{2,1} \subset \mathbb{P}^4$

Ejercicio Sea $H \subset \mathbb{P}^n$ un hiperplano que no contiene ninguna línea $\overline{p\varphi(p)}$ del scroll $S = S_{k,l}$.

P.D.: $H \cap S$ es una curva racional normal en $\mathbb{P}^{n-1} = H$.

[Smith, §6.5] [Harris, §15]

Aplicación de Gauss

Ayer vimos: cada subvariedad $\Phi \subset \mathbb{G}(k,n)$ determina una subvariedad $\Psi = \bigcup_{\Lambda \in \Phi} \Lambda \subset \mathbb{P}^n$.

La afirmación revés también se cumple: ciertas subvariedades $V \subset \mathbb{P}^n$ determinan subvariedades de $\mathbb{G}(k,n)$.

Sea $V \subset \mathbb{P}^n$ variedad casi proyectiva suave de dimensión d.

$\Rightarrow \forall p \in V \quad T_pV \subset \mathbb{P}^n$ tiene dimensión d

$\Rightarrow \quad T_pV \in \mathbb{G}(d,n)$

Definimos la aplicación de Gauss

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_V : V &\longrightarrow \mathbb{G}(d,n) \\ p &\longmapsto T_pV \end{aligned}$$

La imagen es la variedad de planos tangentes a V

Teorema Si $V \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad suave irreducible y de dimensión d, entonces la aplicación de Gauss es un morfismo de variedades casi-proyectivas. Si V es proyectiva su imagen en $\mathbb{G}(d,n)$ es cerrada y por lo tanto proyectiva también

Ejemplo: Sea $V \subset \mathbb{P}^n$ subvariedad lineal de dimensión d y vimos que $T_pV = V \quad \forall p \in V$

$\Rightarrow \quad \operatorname{Im} \mathcal{G}_V = \{T_pV\} \subset \mathbb{G}(d,n)$ es un punto.

Ejemplo: Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie suave definida por el polinomio homogéneo irreducible

$$F(z_0, \dots, z_n) = 0$$

En este caso $\quad \mathcal{G}_X : X \longrightarrow \mathbb{G}(n-1,n) = (\mathbb{P}^n)^*$

$$p \longmapsto \left[\frac{\partial F}{\partial z_0}(p) : \dots : \frac{\partial F}{\partial z_n}(p)\right]$$

Comentario: Si $V \subset \mathbb{P}^n$ no es suave la aplicación de Gauss es una aplicación racional

$$g_V : V \dashrightarrow \mathbb{G}(d,n) \qquad d = \dim V$$

que es morfismo en el abierto $V \setminus V^{sing}$.

La cerradura de su imagen es biendefinida y se llama la variedad de planos tangentes a V aún contiene puntos que son límites de planos tangentes a V (y no en sí planos tangentes a V).

Teorema [F.L. Zak]

Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad suave irreducible no lineal de dimensión k entonces g_X es finito y en particular su imagen tiene dimensión k.

§ Variedades tangenciales

Podemos aplicar la proposición de la clase pasada a las variedades de planos tangentes:

Definición:

Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ variedad irreducible de dim k. Definimos su variedad tangencial

$$TX = \bigcup_{\Lambda \in g_X(X)} \Lambda \subset \mathbb{P}^n$$

Es una subvariedad.

Si X es suave podemos dar una descripción alternativa

$$\Sigma = \{(p,q) : q \in T_pX\} \subset X \times \mathbb{P}^n$$

entonces $\pi_2(\Sigma) \subset \mathbb{P}^n$ es la variedad tangencial.

Observamos que $\pi_1 : \Sigma \longrightarrow X$ es sobreyectivo

con fibras irreducibles de dimensión k
(es espacio tangente $\pi_1^{-1}(p) = T_pX$)

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ es irreducible de dimensión $\leq 2k$

$\Rightarrow$ $\dim TX \leq 2k$

con igualdad si y solo si para $q \in T_pX$ genérico solo existe un número finito de puntos $r \in X$ t.q. $q \in T_rX$.

Ejercicio: Sea $C \subset \mathbb{P}^3$ la curva cúbica torcida.
P.D.: Su variedad tangencial es una superficie cuádrica.

$$C = \mathbb{V}(\overset{F}{xw - yz},\ \overset{G}{y^2 - xz},\ \overset{H}{wy - z^2}) \subset \mathbb{P}^3_{x,y,z,w}$$

C es suave $\Rightarrow$ $TC = \bigcup_{p \in C} T_pC$

$$= \bigcup_{p \in C} \mathbb{V}(dF|_p, dG|_p, dH|_p)$$

$$\left.\begin{aligned} dF|_p &= p_3(x-p_0) - p_2(y-p_1) - p_1(z-p_2) + p_0(w-p_3) \\ dG|_p &= -p_2(x-p_0) + 2p_1(y-p_1) - p_0(z-p_3) \\ dH|_p &= p_3(y-p_1) - 2p_2(z-p_2) + p_1(w-p_3) \end{aligned}\right\} T_pC$$

$$\left.\begin{aligned} p_0p_3 &= p_1p_2 \\ p_1^2 &= p_0p_2 \\ p_2^2 &= p_1p_3 \end{aligned}\right\} p \in C$$