Tarea

① Muestra que cada variedad afín es una intersección de un número finito de hipersuperficies.

② Sea S_3 el grupo de permutaciones de $\{1,2,3\}$. S_3 actúa en $\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ permutando las variables. ¿Cuál es el anillo de polinomios invariantes bajo la acción?

Hilbert Nullstellensatz – el teorema fundamental de la geometría algebraica

Ya vimos que dado $V \subset \mathbb{A}^n$ variedad afín se asocia un ideal

$$V \longmapsto \mathbb{I}(V)$$

también podemos empezar con un ideal $I \subset \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ y asociar una variedad

$$I \longmapsto \mathbb{V}(I)$$

El Nullstellensatz nos dice que las dos construcciones son esencialmente inversas, más precisamente

Nullstellensatz (fuerte)

Para cada ideal $I \subset \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ tenemos

$$\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = \sqrt{I}$$

En particular, si I es radical: $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = I$

Entonces tenemos una correspondencia

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variedades} \\ \text{algebraicas} \\ \text{afines } V \subset \mathbb{A}^n \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ideales} \\ \text{radicales} \\ I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \end{array} \right\}$$

Recuerda que si $W \subset V$ es una subvariedad, entonces las funciones que se anulan en V también se anulan en W $\Rightarrow$ $\mathbb{I}(V) \subset \mathbb{I}(W)$

Entonces, ideales maximales en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ son corresponden a las variedades más pequeñas (con resp. a la inclusión):
Sea $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ un punto, su ideal asociado es el ideal maximal

$$m_a = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$$

y la variedad es $\mathbb{V}(m_a) = \{a\}$

Por lo tanto el Nullstellensatz determina la correspondencia

$$\{\text{puntos en } \mathbb{A}^n\} \longleftrightarrow \{\text{ideales maximales en } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\}$$

$\rightsquigarrow$ podemos ver el Nullstellensatz como una generalización multidimensional del teorema fundamental de álgebra

Es muy importante que el campo sea algebraicamente cerrado, por ejemplo consideramos en $\mathbb{R}[x,y]$

$$I_1 = (1) = \mathbb{R}[x,y], \; I_2 = (1+x^2), \; I_3 = (1+x^2+x^4)$$

entonces

$$V(I_1) = V(I_2) = V(I_3) = \emptyset$$

Pero con un campo k alg. cerrado eso no puede pasar.
En el caso de una variable $k[x]$, por ejemplo, cada ideal es principal $I = (f)$.

entonces $\mathbb{V}(I)$ es el conjunto de raíces de f y si f no es constante $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset$. La única manera de obtener $\mathbb{V}(I) = \emptyset$ es que f sea constante

$\Rightarrow \frac{1}{f} \in K \Rightarrow 1 \in I \Rightarrow I = k[x]$.

En múltiples variables tenemos

Nullstellensatz débil

Sea k un campo algebraicamente cerrado y $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ un ideal tal que $\mathbb{V}(I) = \emptyset$, entonces $I = k[x_1, \dots, x_n]$

Prueba: e.g. en Cox-Little-O'Shea "Ideals, varieties and algorithms" p. 170 (§4.1) //

El Nullstellensatz débil es la base de la prueba del Nullstellensatz (fuerte):

Prueba del Nullstellensatz:

Fijamos un conjunto generador $I = (f_1, \dots, f_s)$.

P.D. $\forall f \in \mathbb{I}(\mathbb{V}(f_1, \dots, f_s)) \ \exists m > 0 : f^m \in (f_1, \dots, f_s)$

$\Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] : f^m = \sum_{i=1}^{s} a_i f_i$

Consideramos el ideal

$$\tilde{I} = (f_1, \dots, f_s, 1 - yf) \subset k[x_1, \dots, x_n, y]$$

Afirmación: $\mathbb{V}(\tilde{I}) = \emptyset$

Prueba de la afirmación: Sea $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}$ entonces (•) $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{V}(f_1, \dots, f_n)$, o

(••) $(a_1, \dots, a_n) \notin \mathbb{V}(f_1, \dots, f_n)$

$(\cdot)$ $f(a_1,\dots,a_n)=0 \quad \Rightarrow \quad 1-a_{n+1}f(a_1,\dots,a_n)=1\neq 0$

$\Rightarrow (a_1,\dots,a_n,a_{n+1}) \notin \mathbb{V}(\tilde{I})$

$(\cdot\cdot)$ $\exists\ 1\leq i\leq s : f_i(a_1,\dots,a_n)\neq 0$

y considerando $f_i\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n,y]$ también

$f_i(a_1,\dots,a_n,a_{n+1})\neq 0$

$\Rightarrow (a_1,\dots,a_n,a_{n+1}) \notin \mathbb{V}(\tilde{I})$

Entonces, $\mathbb{V}(\tilde{I})=\emptyset$ y por el Nullstellensatz débil $1\in\tilde{I}$

$\Rightarrow \exists\ p_i, q\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n,y]$:

(1) $$1=\sum_{i=1}^{s} p_i(x_1,\dots,x_n,y)f_i + q(x_1,\dots,x_n,y)(1-yf)$$

evaluamos $y=\dfrac{1}{f(x_1,\dots,x_n)}$:

(2) $$1=\sum_{i=1}^{s} p_i(x_1,\dots,x_n,\tfrac{1}{f})f_i$$

Multiplicamos (2) por ambos lados con una potencia f^m suficientemente grande para eliminar denominadores

$$\Rightarrow f^m=\sum_{i=1}^{s} a_i f_i \quad \Rightarrow \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))\subset\sqrt{I}$$

Ejercicio: Verifica $\sqrt{I}\subset\mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$

$\square$

TAREA:
1. Verifica que ideales primos corresponden a variedades irred.
2. Muestra que la dimensión de una variedad afín es finita.
3. Muestra que un ideal radical en $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ es la intersección de todos los ideales maximales que lo contienen.
4. Muestra que el complemento de un punto es un abierto.
5. Muestra que el conjunto de ceros de $y-e^x$ no es var. alg. afín.

El anillo de coordenadas

Muchas veces en estudiar ciertos objetos nos ayuda estudiar cierta clase de funciones en ellos, por ejemplo

espacios topologicos $\leftrightarrow$ funciones continuas
variedades (suaves) $\leftrightarrow$ funciones suaves
variedades complejas $\leftrightarrow$ funciones holomorfas

En nuestro caso:
variedades algebraicas (afines) $\leftrightarrow$ funciones polinomiales

Para una variedad algebraica dim $V \subset \mathbb{A}^n$ cada polinomio $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ se puede ver como una función $V \to \mathbb{C}$ restringiendo f a V. Obtenemos una $\mathbb{C}$-álgebra

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]|_V =: \mathbb{C}[V]$$

el anillo de coordenadas de V.

Ejemplo $\mathbb{C}[\mathbb{A}^n] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

Tenemos un homomorfismo de $\mathbb{C}$-algebras que es sobreyectivo

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]|_V$$

y el nucleo son justo los polinomios que son cero en V

$$\Rightarrow \quad \mathbb{C}[V] \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / \mathbb{I}(V)$$

Entonces, funciones en V son clases de equivalencia mod $\mathbb{I}(V)$.

Por ejemplo la función $\frac{1}{x}$ y y son la misma en $\mathbb{V}(xy-1)$.

Ejemplo Sea $V = \mathbb{V}(x^2+y^2-z^2) \subset \mathbb{A}^3$

$x^2+y^2-z^2$ es irreducible $\Rightarrow$ genera un ideal primo y por lo tanto radical. $\Rightarrow$ $\mathbb{I}(V) = (x^2+y^2-z^2)$.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x,y,z]/(x^2+y^2-z^2)$$

$\mathbb{C}[V]$ se puede interpretar como $\mathbb{C}[x,y,z]$ con la relación

$$x^2+y^2-z^2=0$$

Por ejemplo, tenemos

$$x^3+2xy^2-2xz^2+x = 2x(x^2+y^2-z^2)+x-x^3$$
$$= x-x^3 \pmod{\mathbb{I}(V)}.$$

Los morfismos entre variedades afines determinan homomorfismos entre los anillos de coordenadas:

Sea $V \xrightarrow{F} W$ un morfismo, definimos

$$\mathbb{C}[W] \xrightarrow{F^\#} \mathbb{C}[V]$$
$$g \longmapsto g\circ F \quad \text{su pull back}$$

Entonces, para $p\in V$

$$F^\#(g)(v) = \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{C}[W]}}{g}(\overset{\substack{W\\ \cup}}{F(v)})$$

Para ver que $F^\#(g)$ es una función polinomial es suficiente acordar que F es determinado por polinomios y la evaluación de un polinomio en polinomios es polinomial. $\Rightarrow$ $F^\#$ es biendefinido.

Ejercicio: Verifica que $F^\#$ es un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras

Ejemplo: Sea $F: \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^2$

$$(x,y,z) \longmapsto (x^2y, x-z)$$

Sean (u,v) las coordenadas de $\mathbb{A}^2$, entonces

$$F^\#: \mathbb{C}[u,v] \longrightarrow \mathbb{C}[x,y,z]$$
$$u \longmapsto x^2y$$
$$v \longmapsto x-z$$