Propiedades locales

§ El espacio tangente en un punto

Por ser de naturaleza local y como ya vimos que localmente variedades casi-proyectivas se ven como variedades afines supongamos por el momento que $V \subset \mathbb{A}^n$ es un cerrado de Zariski y fijamos un sistema de coordenadas.

Sea $l \subset \mathbb{A}^n$ una línea que pasa por el origen:

$$l = \{(ta_1, \dots, ta_n) : t \in \mathbb{C}\} \ni 0$$

Y sea $I(V) = (F_1, \dots, F_r) \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Supongamos $0 \in V$

La intersección $l \cap V$ esta determinada por las ecuaciones

$$f_i(t) := F_i(ta_1, \dots, ta_n) = 0 \qquad i = 1, \dots, r$$

polinomio en una variable $\Rightarrow$ factoriza en sus raices (con multiplicidad)

La multiplicidad de $l \cap V$ en 0 en este caso es el exponente más alto de t que aparece en uno de los $f_i(t)$.

Definición: La línea l es tangente a V en p si la multiplicidad de $l \cap V$ en p es > 1. Decimos l es tangente a V de orden n si la multiplicidad es $n+1$. El espacio tangente T_pV de V en p es el conjunto de todos los puntos que pertenecen a líneas tangentes.

Ejemplo: $V = \mathbb{V}(x^2 - y) \subset \mathbb{A}^2$ y $l = \{(ta, tb) : t \in \mathbb{A}^1\}$

Tenemos $f(t) = (ta)^2 - tb = 0$

$$\Rightarrow l \cap V = \left\{ \left(\frac{b}{a}, \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right), (0,0) \right\}$$

Si $b \neq 0$ $f(t) = 0$ tiene dos soluciones, cada una de mult. 1

$\Rightarrow l$ no es tangente en $(0,0)$

Si $b=0$ $f(t)=0$ tiene una solución de multiplicidad 2
$\Rightarrow$ l es tangente en $(0,0)$.
$\Rightarrow$ $T_{(0,0)}V = \{(t,0) : t \in \mathbb{A}^1\}$

Ejercicio Sea $V = \mathbb{V}(y^2 - x^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$ y $p=(0,0)$. Calcula es espacio tangente de V en p.

Sea $l = \{(ta, tb) : t \in \mathbb{A}^1\}$. Entonces
$$f(t) = (tb)^2 - (ta)^2 - (ta)^3 = t^2(b^2 - a^2 - ta^3)$$
$\Rightarrow$ para cada valor de a, b $t=0$ es raíz múltiple
$\Rightarrow$ $T_pV = \mathbb{A}^2$

Para calcular el espacio tangente vamos a usar el diferencial

Definición: Sea $F \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Su diferencial en el punto $p = (p_1, \dots, p_n)$ es el polinomio lineal
$$dF|_p = \sum_{j=1}^{n} \Big(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_i}(p)}_{\in \mathbb{C}} \Big)(x_j - p_j) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_1$$

Recuerda, si $F(p)=0$ dF_p es la función lineal que mejor aproxima $F(x)$ en p (la parte lineal de la expansión de Taylor de F en p)

Más precisamente, F se puede escribir como
$$F(x) = \underbrace{F(p)}_{\text{const.}} + \underbrace{L(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)}_{= dF|_p \text{ polinomio lineal}} + \underbrace{G(x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n)}_{\text{polinomio sin términos lineales y constante}} \quad ☆$$

Teorema Sea $V \subset \mathbb{A}^n$ cerrado de Zariski, $\mathbb{I}(V) = (F_1, \dots, F_r)$ y $p \in V$. Entonces
$$T_pV = \mathbb{V}(dF_1|_p, \dots, dF_r|_p) \subset \mathbb{A}^n$$
Además, T_pV es independiente del conjunto generador $\{F_1, \dots, F_r\}$ de $\mathbb{I}(V)$.

Observamos que T_pV es una variedad lineal que contiene p. Por lo tanto lo interpretamos como un espacio vectorial con origen p.

Prueba Sin perder de generalidad $p=0$ (si no cambiamos las coordenadas de $\mathbb{A}^n$).

Sea $l=\{(tx_1,\dots,tx_n) : t\in\mathbb{A}^1\}$ y así $l\cap V$

Para $l\cap V$ tenemos con ☆

$$F_i(tx_1,\dots,tx_n) = \underbrace{F_i(0)}_{=0 \text{ pues } p\in V} + L_i(tx_1,\dots,tx_n) + \underbrace{G_i(tx_1,\dots,tx_n)}_{\text{sin términos const./lineales}}$$

$$= t\,L_i(x_1,\dots,x_n) + t^2 G_i(tx_1,\dots,tx_n)$$

Entonces, la multiplicidad de $l\cap V$ es >1 $\iff$

$$L_1(x_1,\dots,x_n) = \dots = L_r(x_1,\dots,x_n) = 0$$

Cada $x=(x_1,\dots,x_n)$ que satisface esas ecuaciones, i.e. $x\in\mathbb{V}(L_1,\dots,L_r)$ pertenece a una línea tangente a V en 0

$$\Rightarrow \quad x\in T_pV$$

$$\Rightarrow \quad T_pV = \mathbb{V}(L_1,\dots,L_r)\subset\mathbb{A}^n \quad /\!\!/$$

Para verificar que T_pV no depende de $\{F_1,\dots,F_r\}$ supongamos que $\{\tilde{F}_1,\dots,\tilde{F}_s\}$ es otro conjunto generador de $\mathbb{I}(V)$.

$$\Rightarrow \quad F_i = H_{i1}\tilde{F}_1+\dots+H_{is}\tilde{F}_s \quad \forall\, i\in[1,r],\ H_{ij}\in\mathbb{C}[V]$$

$$\Rightarrow \quad dF_i = \sum_{j=1}^{s}\left(dH_{ij}\tilde{F}_j + H_{ij}\,d\tilde{F}_j\right)$$

Observa que $\tilde{F}_j(p)=0$ pues $p\in V$, entonces

$$dF_i|_p = \sum_{j=1}^{s} H_{ij}(p)\,d\tilde{F}_j|_p$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{V}(dF_1|_p,\dots,dF_r|_p)\supset\mathbb{V}(d\tilde{F}_1|_p,\dots,d\tilde{F}_s|_p)$$

La inclusión opuesta es consecuencia del argumento con $F_i\leftrightarrow\tilde{F}_j$.

Además observamos que las ecuaciones determinadas por las $dF_i|_p$ son lineales $\Rightarrow T_pV \subset \mathbb{A}^n$ es lineal. $\square$

El espacio tangente proyectivo

Podemos generalizar la construcción del espacio tangente para variedades casi-proyectivas $V \subset \mathbb{P}^n$

Recuerda que V es la intersección de un abierto con un cerrado en $\mathbb{P}^n$

$\Rightarrow \forall\, p \in V$ pertenece a un cerrado en $\mathbb{P}^n$

Sin perder de generalidad podemos suponer que $V \subset \mathbb{P}^n$ es cerrado, i.e. una variedad proyectiva.

Consideramos $\tilde{V} \subset \mathbb{A}^{n+1}$ el cono afín de $V \subset \mathbb{P}^n$ y $\tilde{p} \in \tilde{V}$ un representante de $p \in V$, es decir p corresponde a la línea l_p entre el origen y $\tilde{p} \in \tilde{V}$ en $\mathbb{A}^{n+1}$.

Recuerda que $\tilde{V}$ tiene la forma de un cono $\Rightarrow l_p \subset \tilde{V}$

$\Rightarrow l_p \subset T_{\tilde{p}}\tilde{V}$

En particular, $T_{\tilde{p}}\tilde{V} \subset \mathbb{A}^{n+1}$ es una subvariedad lineal que contiene el origen

$\Rightarrow$ existe una única subvariedad lineal de una dim. menos de $\mathbb{P}^n$ que corresponde a $T_{\tilde{p}}\tilde{V}$ (identificando puntos que pertenecen a la misma línea por el origen) $\rightsquigarrow T_pV$

Ejercicio: Verifica que cualquier punto $\tilde{q} \in l_p \subset \tilde{V}$ determina la misma variedad lineal $T_pV \subset \mathbb{P}^n$.

Esta es el espacio tangente proyectivo de p en V.