§ Puntos suaves

Definición: Un punto $p \in V$ de una variedad casi-proyectiva V es suave si

$$\dim T_p V = \dim_p V$$

De lo contrario p es singular.

Observaciones:

* La dimensión es una invariante bajo isomorfismos
  $\Rightarrow$ $\dim T_p V$ no depende del encaje $V \subset \mathbb{P}^n$ ni de la vecindad afín utilizada para calcularla
  $\Rightarrow$ puntos suaves son invariantes bajo isomorfismo.
* La noción es algebraica $\Rightarrow$ es bien definida sobre cualquier campo.

Ejercicio Verifique que la superficie de Veronese y la curva racional normal son suaves en cada punto.

$\mathbb{P}^n$ es suave en cada punto: tiene una cobertura de espacios afines $\mathbb{A}^n$ y en $\mathbb{A}^n$ el espacio tangente en cada punto es $\mathbb{A}^n$

$\Rightarrow \dim T_p \mathbb{P}^n = n = \dim \mathbb{P}^n \quad \forall \; p \in \mathbb{P}^n$

$\hookrightarrow$ la superficie de Veronese es isomorfa a $\mathbb{P}^2$ y la curva racional normal es isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

Ejemplo: $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ también es suave en cada punto porque cada punto tiene una vecindad $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \cong \mathbb{A}^{n+m}$.

Definición. El conjunto de puntos singulares de una variedad V se llama su lugar singular V^{sing} y es una subvariedad propia cerrada de V.

Teorema (Criterio de Jacobi) El lugar singular de una variedad casi proyectiva V es un conjunto cerrado propio de V.
Explícitamente, si $V \subset \mathbb{A}^n$ es una subvariedad irreducible* de dimensión d con ideal radical $\mathbb{I}(V)$ generado por $F_1, \dots, F_r \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ entonces $V^{sing} \subset V$ es el conjunto de ceros en comunes de los polinomios que son los $(n-d) \times (n-d)$-menores de la matriz de Jacobi

$$r\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_r}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{n}\right. =: J(V)$$

* equidim. es suficiente

Comentario

Cada variedad afín contiene un conjunto abierto denso $V \setminus V^{sing}$ de puntos suaves $\rightsquigarrow$ V es genéricamente suave

Cada variedad casi-proyectiva contiene una variedad afín como conjunto abierto denso $\Rightarrow$ V es genéricamente suave.

Corolario Sea $V \subset \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva equidimensional con $\mathbb{I}(V) = (F_1, \dots, F_r) \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, F_i homogéneo $\forall i$.
Entonces, $V^{sing} = \mathbb{V}\left(c \times c\text{-menores de } \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}\right) \cap V \subset \mathbb{P}^n$
con $c = \operatorname{codim} V$.

En particular, V es suave si y solo si su cono afín $\tilde{V} \subset \mathbb{A}^{n+1}$ tiene a lo máximo solo una singularidad en el origen (apex del cono).

Prueba: Usar el teorema para $\tilde{V} \subset \mathbb{A}^{n+1}$.

Idea de la Prueba del Teorema

Recuerda que cada variedad casi proyectiva tiene una cobertura de objetos afines

$\Rightarrow$ es suficiente mostrar que el lugar singular de una variedad afín es propio y cerrado.

Sea $p \in V \subset \mathbb{A}^n$ variedad afín. Entonces,

$$T_pV = \mathbb{V}(dF_1|_p(x-p), \dots, dF_r|_p(x-p))$$

Observa que las ecuaciones se obtienen del producto

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\Big|_p & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\Big|_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_1}\Big|_p & \cdots & \frac{\partial F_r}{\partial x_n}\Big|_p \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_n - p_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ T_pV es el kernel de una matriz $J(V)|_p$ determinada por la matriz de Jacobi $J(V)$.

$p \in V$ es singular $\Leftrightarrow$ $\dim T_pV > \dim_p V$

$\Leftrightarrow$ rango $(J(V)|_p) < n-d$

$\Leftrightarrow$ $(n-d)$-menores son cero

$\Rightarrow$ $V^{sing} \subset V$ cerrado.

P.D. $V^{sing} \subset V$ propio.

Consideramos el caso $V = \mathbb{V}(F) \subset \mathbb{A}^n$, $F \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

$$\Rightarrow V^{sing} = \mathbb{V}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \cap V \subset \mathbb{A}^n$$

Si $V^{sing} = V \Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_p = 0 \quad \forall p \in V$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i} \in \mathbb{I}(V) = (F)$$

pero $\deg \frac{\partial F}{\partial x_i} < \deg(F)$ $\boxed{\text{char } k = 0}$

(en caso de que x_i aparece en el soporte de F, pero $F \neq$ const. $\Rightarrow \exists i$ t.q. x_i aparece en F)

↳ implica el teorema para hipersuperficies

Vamos a ver que cada variedad tiene un conjunto abierto denso isomorfo a una hipersuperficie y con eso termina la prueba //

Comentario Si char $k = p > 0$ la prueba no funciona, por ejemplo si $F = x^p + yz \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = p x^{p-1} = 0 \in (F)$

El resultado sigue valido, solo se requiere maquinaria algebraica para la prueba.

Ejemplo: Sea $V = \mathbb{V}(x^2 + y^2 - z^2) \subset \mathbb{P}^2$

codim $V = 1$ y codim$(\tilde{V} \subset \mathbb{A}^3) = 1$

$\Rightarrow V^{sing}$ y $(\tilde{V}^{sing})$ son determinadas por los 1×1-menores de

$$J(V) = \left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right]^T$$

$$= [2x, 2y, -2z]^T$$

$$\Rightarrow V^{sing} = \emptyset \quad y \quad \tilde{V}^{sing} = \{(0,0,0)\}$$

$\Rightarrow$ El cono afín de una variedad proyectiva suave puede tener un punto singular en el origen. //