Observamos que $F^\#$ no es un isomorfismo, porque no es sobreyectivo (ni s ni t pertenecen a su imagen).

para que sea sobreyectivo los polinomios F_i que determinen F deben ser de grado 1.

Definición Dos subvariedades de $\mathbb{P}^n$ son proyectivamente equivalente si existe un cambio de coordenadas lineales de $\mathbb{P}^n$ que define un isomorfismo entre las subvariedades.

↳ esta noción más fuerte de isomorfismo asegura que también los anillos de coordenadas homogeneas son isomorfos.

↳ Además, en este caso, el morfismo inverso también admite una descripción global.

Conclusión: El anillo de coordenadas homogeneas determina a la variedad proyectiva, pero no al revés.

Sean $V \subset \mathbb{P}^m$, $W \subset \mathbb{P}^n$ variedades proyectivas y $\mathbb{C}[V]$, $\mathbb{C}[W]$ sus anillos de coordenadas homogeneas. Un isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\mathbb{C}[V] \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}[W]$ determina un isomorfismo entre los conos afines

$$\tilde{W} \subset \mathbb{A}^{n+1} \xrightarrow{F} \tilde{V} \subset \mathbb{A}^{m+1}$$

con $F^\# = \sigma$

Ejercicio: Verifica o refuta (con contraejemplo)

1. Los anillos de coordenadas homogeneas de variedades proyectivas proyectivamente equivalentes son isomorfos

② Un isomorfismo entre anillos de coordenadas homogeneas de variedades proyectivas determina una equivalencia proyectiva entre las variedades.

§ Automorfismos de $\mathbb{P}^n$ y $\mathbb{A}^n$

no es relevante para el examen general

[Smith, §3.5]

[Automorphisms of Affine Spaces, editor: Arno Essen, 1995, Lecture 1]

Espacio proyectivo

Recuerda que una matriz $g \in GL(n+1, \mathbb{C})$ determina una aplicación lin. $g: \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$, $(x_0, \dots, x_n) \mapsto g(x_0, \dots, x_n)$

y un morfismo $g: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$

$$[x_0 : \dots : x_n] \longmapsto g([x_0 : \dots : x_n])$$

cuyo inverso es g^{-1}. Por la naturaleza de $\mathbb{P}^n$ tenemos que g y λg determinan el mismo automorfismo $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$.

$$\Rightarrow \quad PGL(n+1, \mathbb{C}) := GL(n+1, \mathbb{C}) / \mathbb{C}^* \subseteq Aut(\mathbb{P}^n)$$

De hecho, la inclusión es una igualdad y hay varias maneras de probarlo:

vale sobre cualquier campo k!

Calculo: calculo directo

Analysis complejo: mostrar que cada automorfismo biholomorfo de $\mathbb{P}^n$ es un cambio lineal de coordenadas

Geometría algebraica: utilizando el hecho que cada automorfismo de $\mathbb{P}^n$ induce un automorfismo del grupo de Picard $\cong \mathbb{Z}$.

[Hartshorne, Example II.7.1.1]

Ejemplo: Para $n=1$ tenemos

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$$
$$[z:w] \longmapsto [az+bw : cz+dw]$$

que es una aplicación de Möbius $[z:1] \longmapsto \left[\frac{az+b}{cz+d} : 1\right]$

Por lo contrario, cada aplicación de Möbius $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ determina un automorfismo $[z:w] \mapsto [az+bw : cz+dw]$.

Corolario: Dos subvariedades de $\mathbb{P}^n$ son proyectivamente equivalente si y solo si pertenecen a la misma $PGL(n+1,\mathbb{C})$-órbita de $\mathbb{P}^n$.

Espacio afín k un campo

Tenemos el siguiente resultado de algebra lineal

Proposición: Sea $F: k^n \to k^n$ una aplicación lineal entonces F es biyectiva si y solo si es inyectiva. Además, su inversa también es lineal

Generalizando al caso de aplicaciones polinomiales (es decir, morfismos de variedades algebraicas afines) hay que tener cuidado:

Ejemplo: Sea $F: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ dada por $F(x) = x^3$. Entonces, F es inyectiva pero no es biyectiva.

↳ el problema es que $\mathbb{Q}$ no es algebraicamente cerrado

Tenemos el siguiente resultado de Bialynicki-Birula y Rosenlicht, 1962:

Teorema: Sea k un campo algebraicamente cerrado de característica cero y $F: k^n \longrightarrow k^n$ una aplicación polinomial inyectiva. Entonces, F es biyectiva y su inversa también es una aplicación polinomial.

Estudiar los automorfismos de $\mathbb{A}^n$ sigue un area activa e.g. la conjetura de Jacobi.

TAREA

~~Ejercicio:~~ Sea $F: \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ una aplicación polinomial. Entonces, F es invertible si y solo si $k[x_1,\dots,x_n] = k[F_1,\dots,F_n]$

si existen $G_1,\dots,G_n \in k[x_1,\dots,x_n]$ t.q. $G_i(F_1,\dots,F_n) = x_i \; \forall i$

Tipp: Puedes usar el hecho que cada inversa de lado izquierdo también es inversa de lado derecho.