La notación $F^\#$ es similar a la notación de la aplicación dual en álgebra lineal porque se puede ver como una generalización de ella: Sea F un morfismo con componentes lineales homogéneos $F_1, \dots, F_m$. Entonces, F determina una aplicación lineal $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ cuya matriz está dada por los coeficientes de los F_i.
La restricción del pullback a los polinomios de grado uno (funcionales lineales) determina una aplicación de espacios vectoriales

$$(\mathbb{C}^m)^* \longrightarrow (\mathbb{C}^n)^*$$

que coincide con la aplicación dual de $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.

Tarea

1. Verifica que el anillo de coordenadas de una variedad algebraica afín es una $\mathbb{C}$-álgebra reducida y finitamente generada
2. Recuerda que un ideal radical en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ es la intersección de todos los ideales maximales que lo contienen. Demuestre que lo mismo es válido en $\mathbb{C}[V]$.

Equivalencia entre Álgebra y Geometría

Hemos visto que cada variedad afín determina una $\mathbb{C}$-álgebra reducida finitamente generada y que los morfismos determinan homomorfismos de $\mathbb{C}$-álgebras.

Esta asignación se puede extender a una equivalencia de categorías entre $\mathbb{C}$-álgebras reducidas fin. gen. y variedades alg. afines.

- $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/\mathbb{I}(V)$ ideal radical

  $\Rightarrow$ $\mathbb{C}[V]$ no contiene elementos nilpotentes y es finitamente generada por las clases $x_1,\dots,x_n$.

- Sea R un $\mathbb{C}$-álgebra finitamente generada y reducida fijamos un conjunto generador $f_1,\dots,f_n$ y definimos el homomorfismo sobreyectivo

$$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n] \xrightarrow{\pi} R$$
$$x_i \longmapsto f_i$$

$\Rightarrow$ $R \cong \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I$ con I el nucleo de π

R reducida implica que I es radical y por lo tanto define a una variedad $V=\mathbb{V}(I) \subset \mathbb{A}^n$ con $\mathbb{I}(V)=I$. Además, $\mathbb{C}[V] \cong R$.

Teorema

Cada $\mathbb{C}$-álgebra finitamente generada y reducida es isomorfa al anillo de coordenadas de una variedad algebraica afín. Además, si $V \xrightarrow{F} W$ es un morfismo de variedades algebraicas afines, su pullback $\mathbb{C}[W] \xrightarrow{F^\#} \mathbb{C}[V]$ es un homomorfismo. Si $\sigma: R \to S$ es un homom. de $\mathbb{C}$-álgebras fin. gen. red. entonces existe un morfismo entre las variedades asociadas tal que $F^\# = \sigma$ que es único bajo isomorfismo.

Prueba: La discusión anterior muestra la primera parte. Solo falta verificar la última afirmación.

Fijamos $\sigma: R \to S$ y presentaciones para R y S:

$$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}[y_1,\dots,y_m]/J$$

donde I y J son ideales radicales. Sea $W := \mathbb{V}(I)$ en $\mathbb{A}^n$ y $V = \mathbb{V}(J) \subset \mathbb{A}^m$. Sea $F_j := \sigma(x_j)$ para $j=1,\dots,n$. Definimos

$$F: \mathbb{A}^m \longrightarrow \mathbb{A}^n$$
$$a=(a_1,\dots,a_m) \mapsto (F_1(a),\dots,F_n(a))$$

P.D. $F: V \to W$

Sea $a \in V$, tenemos que verificar que $F(a) \in W$

$\iff \quad G(F(a)) = 0 \quad \forall\, G \in I$

Calculamos $\quad G(F(a)) = G(F_1(a),\dots,F_n(a))$

$$= G(\sigma(x_1)(a),\dots,\sigma(x_n)(a))$$
$$= \sigma(G)(a)$$

$G \in I \Rightarrow G = 0$ en $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I$ entonces el homomorfismo σ manda G a la clase de cero en $\mathbb{C}[y_1,\dots,y_m]/J \Rightarrow \sigma(G) \in J \Rightarrow \sigma(G)(a) = 0 \ \forall\, a \in V$

$\Rightarrow G(F(a)) = 0 \quad \forall\, G \in I \quad \Rightarrow F(a) \in W.$

Además, por definición tenemos $\sigma = F^{\#}$.

Falta verificar que F es único bajo isomorfismo.

Los polinomios F_i que representan $\sigma(x_i)$ fueron elegidos de manera arbitraria. Si F_i' es otro polinomio representando $\sigma(x_i)$ tenemos que

$F_i - F_i'$ es cero en V y por lo tanto el morfismo
$$F': \mathbb{A}^m \longrightarrow \mathbb{A}^n$$
$$a = (a_1, \dots, a_m) \longmapsto (F_1'(a), \dots, F_n'(a))$$
coincide con F en V. Por lo tanto $F: V \to W$ no depende de los representantes.

Falta verificar que tampoco depende de la elección de las presentaciones de R y S, que dependen de los conjuntos generadores que elegimos.

Otras presentaciones corresponden a variedades isomorfas

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\cong"] & W \arrow[d, "\cong"] \\ V' \arrow[r, "F'"] & W' \end{tikzcd}$$

que inducen un morfismo F' de la misma manera.

Ejercicio: Verifique que el diagrama conmute.

$\square$

El teorema muestra que el pullback es un functor contravariante

$\rightarrow$ cambiando el orden

Además, dos variedades algebraicas afines son isomorfas si y solo si sus anillos de coordenadas lo son.

Ejemplo ① Vimos que $\mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{V}(y - x^2) \subset \mathbb{A}^2$ es isom.
$$t \longmapsto (t, t^2)$$

Su pullback $\mathbb{C}[x,y]/(y-x^2) \longrightarrow \mathbb{C}[t]$ es sobreyectivo
$$x \longmapsto t$$
$$y \longmapsto t^2$$

con núcleo (0), por lo tanto un isomorfismo.

(2) Consideramos $\mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{V}(y^2-x^3) \subset \mathbb{A}^2$

$$t \longmapsto (t^2, t^3)$$

es una biyección pero no es isomorfismo por la falta de una inversa polinomial. También podemos llegar a la misma conclusión con el pullback

$$\mathbb{C}[x,y]/(y^2-x^3) \longrightarrow \mathbb{C}[t]$$
$$x \longmapsto t^2$$
$$y \longmapsto t^3$$

no es un isomorfismo, pues t no está en su imagen.

TAREA Muestra que

(1) El pullback $F^{\#}: \mathbb{C}[W] \to \mathbb{C}[V]$ es inyectivo si y solo si $F: V \to W$ es dominante, es decir $F(V) \subset W$ es denso.

(2) El pullback $F^{\#}: \mathbb{C}[W] \to \mathbb{C}[V]$ es sobreyectivo $\iff$ $F: V \to W$ define un isomorfismo entre V y una subvariedad de W.

(3) Si $F = (F_1, \dots, F_n): \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ es un isomorfismo, entonces el determinante de Jacobi $\det\left(\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{ij}\right)$ es un polinomio no constante.
La conjetura de Jacobi es la conversa y no se sabe.

§ El espectro de un anillo

El espectro maximal de un anillo R es el conjunto de sus ideales maximales

$$\operatorname{maxSpec}(R) = \{ \mathfrak{m} \subset R : \mathfrak{m} \text{ es ideal maximal} \}$$

La correspondencia de variedades afines algebraicas

$$V \leftrightarrow \operatorname{maxSpec}(\mathbb{C}[V])$$

no solo vale a nivel de conjuntos pero también topológicamente:

- los conjuntos cerrados (Zariski) en $\operatorname{maxSpec}(\mathbb{C}[V])$ son los ideales maximales en $\mathbb{C}[V]$ que contienen algún ideal fijo de $\mathbb{C}[V]$ (que corresponde a una subvariedad $W \subset V$)
- dado un morfismo $F: V \to W$ y un punto $p \in V$ podemos interpretar p como un ideal maximal $\mathfrak{m} \subset \mathbb{C}[V]$

  $\Rightarrow$ $(F^{\#})^{-1}(\mathfrak{m}) \subset \mathbb{C}[W]$ es un ideal maximal → Ejercicio
  y por lo tanto en $\operatorname{maxSpec} \mathbb{C}[W]$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{maxSpec} \mathbb{C}[V] \xrightarrow{F} \operatorname{maxSpec} \mathbb{C}[W]$$
$$\mathfrak{m} \longmapsto (F^{\#})^{-1}(\mathfrak{m})$$

Sea ahora R cualquier anillo conmutativo. Definimos la topología de Zariski en $\operatorname{maxSpec} R$: los conjuntos cerrados son

$$\mathbb{V}(I) := \{ \mathfrak{m} \in \operatorname{maxSpec} R : \mathfrak{m} \supset I \}, \quad I \subset R \text{ ideal}$$

Dado un homom. de anillos $\sigma: R \to S$ desafortunadamente no tenemos que $\sigma^{-1}(\mathfrak{m}) \subset R$ es maximal si $\mathfrak{m} \in S$ lo es

Ejemplo: Consideramos $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ y el ideal maximal $\{0\} \subset \mathbb{Q}$ pero su preimagen $\{0\} \subset \mathbb{Z}$ no es maximal (pero primo).

↳ En general, la preimagen de un ideal primo es primo

Definición: Sea R un anillo conmutativo, definimos su espectro

$$\operatorname{Spec} R = \{ p \subset R : p \text{ ideal primo} \}$$

$\operatorname{Spec} R$ es un espacio topológico con la topología de Zariski:

conjuntos cerrados son $V(I) := \{ p \in \operatorname{Spec} R : p \supset I \}$ $\forall I \subset R$ ideal

se llama un esquema afín (Grothendieck)

Nota que $\operatorname{maxSpec} R \subset \operatorname{Spec} R$ es un subespacio topológico.

Tarea

1. Verifica que $\operatorname{Spec} R$ es un espacio topológico.
2. Muestra que $p \in \operatorname{Spec} R$ es un punto cerrado $\Leftrightarrow$ $p \subset R$ es maximal
3. Verifica que $\operatorname{maxSpec} \mathbb{Z} = \{ (p) : p \in \mathbb{Z} \text{ primo} \}$ y que $(0) \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ es un punto denso, es decir está contenido en cualquier conjunto abierto no vacío.
4. Sea $R = \mathbb{C}[x,y]/(x^2)$. Muestra que $\operatorname{maxSpec} R$ es homeomorfa a $\mathbb{A}^1$ (eso muestra la idea de esquemas, $\operatorname{maxSpec} R$ se puede pensar como el eje y con multiplicidad dos)