$\Rightarrow$ El cono afín de una variedad proyectiva suave puede tener un punto singular en el origen. //

## Caracterización algebraica de puntos suaves [Hartshorne §I.5]

Sea $A$ un anillo local con ideal maximal $m$ y campo residual $A/m \cong k$.

$A$ es un anillo local regular si $\dim m/m^2 = \dim A$

**Teorema:** Sea $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad afín y $p \in Y$ un punto. Entonces $Y$ es suave en $p$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}_{p,Y}$ es un anillo local regular.

**Prueba** Sean $p = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$

y $a_p = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \subset k[x_1, \ldots, x_n] =: A$

su ideal maximal.

Definimos una aplicación lineal

$$\theta : A \longrightarrow k^n$$
$$f \longmapsto \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$$

Observamos que

$$\theta(x_i - a_i) = (0, \ldots, \underset{\uparrow i}{1}, \ldots, 0)$$

$\Rightarrow \{\theta(x_i - a_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ es una base de $k^n$

Además,

$$\theta((x_i - a_i)(x_j - a_j)) = \theta(x_i x_j - x_i a_j - a_i x_j - a_i a_j)$$
$$= (0, \ldots, \underset{i}{(x_j - a_j)(p)}, \ldots, \underset{j}{(x_i - a_i)(p)}, \ldots, 0) = 0$$

$\Rightarrow$ $\theta(a_p^2) = 0$ y de hecho $\ker(\theta) = a_p^2$

$\Rightarrow$ $\boxed{\theta : a_p / a_p^2 \longrightarrow k^n \text{ es un isomorfismo}}$

Sea $\mathbb{I}(Y) = (f_1, \dots, f_t) \subset A$

y $J = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)_{i,j}$ la Jacobiana

$\Rightarrow$ $\text{rango}(J) = \dim (\theta(\mathbb{I}(Y)))$ como subesp. de $k^n$

$\overset{\text{isom.}}{=} \dim (\mathbb{I}(Y) + a_p^2)/a_p^2$ como subesp. de $a_p/a_p^2$

Recuerda que $\mathcal{O}_{p,Y} = \mathcal{O}(Y)_{a_p}$ es la localización. ($\mathcal{O}(Y) = A/\mathbb{I}(Y)$)

Sea $m$ el ideal maximal de $\mathcal{O}_{p,Y}$, entonces

$m = \{ f \in \mathcal{O}(Y) : f(p) = 0 \} = \{ \frac{f}{g} : f \in a_p + \mathbb{I}(Y), g \in \mathcal{O}(Y) - (a_p + \mathbb{I}(Y)) \}$

$\Rightarrow$ $m/m^2 \cong a_p/(\mathbb{I}(Y) + a_p^2)$

Contamos

$\dim m/m^2 + \text{rango } J = n$

Sea $\dim Y = r$ $\Rightarrow$ $\dim \mathcal{O}_{p,Y} = r$

entonces $\mathcal{O}_{p,Y}$ regular $\Leftrightarrow$ $\dim m/m^2 = r$

$\Leftrightarrow$ $\text{rango } J = n - r$

$\Leftrightarrow$ $p$ es suave $\square$

[Harris p. 175]

**Definición:** Dado $p \in Y \subset \mathbb{A}^n$ el espacio de Zariski cotangente es $T_p^*(Y) := m/m^2$

donde $m \subset \mathcal{O}_{p,Y}$ es el ideal maximal.

↳ Esta definición tiene la ventaja que es intrínsica y se puede extender a variedades casi-proyectivas.

TAREA verifica lo siguiente (en el caso afín)

Su dual es $(m/m^2)^* = T_p(Y)$ es el espacio (de Zariski) tangente.

Recuerda: Si $f: X \to Y$ es un morfismo de variedades casi-proyectivas y $p \in X$ entonces su pull-back induce

$$f^*: \mathcal{O}_{Y, f(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p}$$
$$\mathfrak{m}_{f(p)} \subset \mathcal{O}_{Y,f(p)} \qquad \mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_{X,p}$$

Por lo tanto obtenemos una aplicación (lineal) inducida

$$f^*: \mathfrak{m}_{f(p)}/\mathfrak{m}_{f(p)}^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$$

la aplicación dual es el diferencial:

$$df: T_p(X) \longrightarrow T_{f(p)}Y$$

TAREA: ☆ Sea $i: X \to \mathbb{A}^n$ un encaje de una variedad afín $X \ni p$. Verifica que el diferencial $di$ induce un isomorfismo entre $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$ y $T_p(X) \subset T_p\mathbb{A}^n$, i.e. el conjunto de ceros de los diferenciales.

☆ Si $X \subset \mathbb{A}^n$ y $Y \subset \mathbb{A}^m$ son variedades afines y $f: X \to Y$ es dado por $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[X]$

Entonces verifica que el diferencial $df$ coincide con la Jacobiana $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$.

## § Geometría biracional — Resolución de singularidades

**Definición:** Un morfismo $\pi : X \to V$ de variedades es un **morfismo proyectivo** si $X$ es una subvariedad cerrada de una variedad producto y $\pi$ es la restricción de la proyección:

$$\begin{tikzcd} X \subset V \times \mathbb{P}^n \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[d, "proj"] \\ V \end{tikzcd}$$

**Propiedades:**
- $\pi^{-1}(p)$ es variedad proyectiva $\forall\, p \in V$
- $\pi$ es propio (proper mapping) en la topología Eucl., i.e. la preimagen de un compacto es compacto

**Definición:** Un morfismo $\pi : X \to V$ de variedades casi-proy. es **biracional** si existen $U \subset X$, $U' \subset V$ abiertos t.q.

$$\pi|_U : U \to U' \quad \text{es un isomorfismo.}$$

→ no necesariamente es 1-1 ni sobreyectivo.

El lugar donde $\pi$ no es isomorfismo se llama **locus excepcional**

Si $V \subset Y$, la imagen inversa de $V$ bajo $\pi$ se llama **transformada total de $V$**

Si $Z \subset Y$ es la imagen del locus excepcional, la cerradura $\overline{\pi^{-1}(V - Z)} \subset X$ es la **transformada estricta de $V$**.

### Teorema de la desingularización de Hironaka ($\operatorname{char} k = 0$)

Sea $V$ una variedad casi-proyectiva. Entonces existe una variedad casi-proyectiva suave $X$ y un morfismo proyectivo biracional $\pi : X \to V$.

Además, se puede suponer que $\pi$ es un isomorfismo entre los locus suaves y si $V$ es proyectiva entonces también $X$ lo es.

$X$ se llama una **desingularización** de $V$ y tenemos

$$\pi : X \setminus \pi^{-1}(V^{sing}) \xrightarrow{\sim} V \setminus V^{sing} \quad \text{isomorfismo}$$