Ejercicio Si $V = l_1 \cup l_2 \subset \mathbb{P}^2$ l_1, l_2 línea $l_1 \cap l_2 = \{p\}$
Verifica que $p \in V$ es singular y construye $X \subset \mathbb{P}^3$ suave t.q. $\pi: \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2$, $[x:y:z] \mapsto [x:y]$ se restringe a $\pi: X \to V$ y es desingularización.

$\Rightarrow$ $\dim T_p V = 2 > \dim V = 1$
y $V^{sing} = l_1 \cap l_2$

Consideramos en $\mathbb{P}^3$: $l_1' = \{[x:y:0] : [x:y] \in l_1\}$
$l_2' = \{[x:y:1] : [x:y] \in l_2\}$
y $X = l_1' \cup l_2'$

Observa que $l_1' \cap l_2' = \emptyset$ y X es suave
Además $\pi: \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2$
$[x:y:z] \mapsto [x:y]$
restringido a X es una desingularización de V.

El teorema fue publicado en dos artículos en Annals (la revista matemática con más impacto) y Hironaka obtuvo la medalla de Fields.

Construcción clave: Blow-up

Idea: reemplazar un punto singular $\underbrace{\text{}}_{\text{e.g. en } \mathbb{A}^n}$ por el conjunto de todas las líneas que pasan por el punto $\rightsquigarrow \mathbb{P}^{n-1}$

Supongamos que $p \in \mathbb{A}^n$ es el origen y definimos

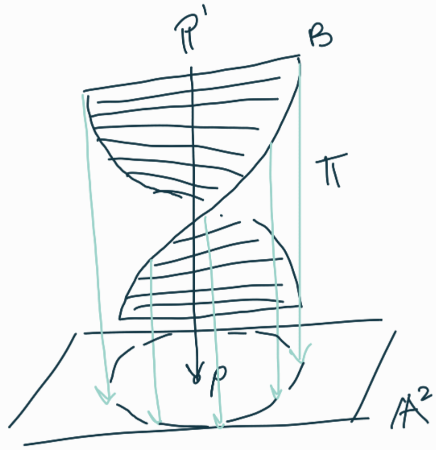
$$B = \{(x, l) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} : x \in l\} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$$

Tenemos la proyección natural

$$\pi: B \to \mathbb{A}^n$$
$$(x, l) \mapsto x$$

Las fibras: si $x \neq 0$ entonces $\pi^{-1}(x) = (x, l)$
con l la línea única por 0 y x
si $x = 0$ entonces $\pi^{-1}(0) = \mathbb{P}^{n-1}$
$\to$ todas las líneas pasan por 0

Ejemplo: para $n=2$ tenemos



Afirmación: B es una variedad casi-proyectiva

demo: Sean $(x_1,\dots,x_n)$ las coordenadas de $\mathbb{A}^n$
y $[y_1,\dots,y_n]$ las coord. homog. de $\mathbb{P}^{n-1}$
$\Rightarrow (x_1,\dots,x_n; y_1:\dots:y_n)$ son coord. de $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$

$(x_1,\dots,x_n) \in \ell = [y_1:\dots:y_n] \Leftrightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \leq 1$

$\Leftrightarrow$ todos los 2×2-menores son cero, i.e.
$x_i y_j - x_j y_i = 0 \quad \forall\, i,j \in [1,n]$

$$\Rightarrow \quad B = \mathbb{V}(x_i y_j - x_j y_i : 1 \leq i < j \leq n) \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$$

Ejercicio: Deduce que B es casi-proyectiva
⚠ B ni es afín, ni es proyectiva.

Observación: $B \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ es cerrado y
$\pi : B \longrightarrow \mathbb{A}^n$ es la restricción de la proyección $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{A}^n$
$\Rightarrow$ π es morfismo proyectivo.

Además,
$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n \setminus \{p\} &\longrightarrow B \\ (x_1,\dots,x_n) &\longmapsto (x_1,\dots,x_n; x_1:\dots:x_n) \end{aligned}$$
es un morfismo y inverso a π en $\mathbb{A}^n \setminus \{p\} \subset \mathbb{A}^n$ denso.
$\Rightarrow$ π es biracional.

Notación: B con $B \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^n$ se llama el **blow-up de un punto** y escribimos $B_p(\mathbb{A}^n) = B$.

Podemos usar esta construcción para definir el blow-up de puntos en variedades casi-proyectivas (y más adelante para el blow-up de subvariedades cas.)

Definición Sea $V \subset \mathbb{A}^n$ variedad afín y $p \in V$. **La explosión (blow-up) de V en p** es la cerradura de Zariski de

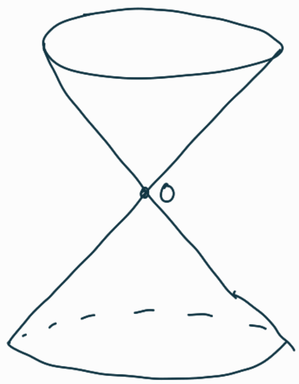
$$B_p(V) := \overline{\pi^{-1}(V \setminus p)} \subset B_p(\mathbb{A}^n)$$

Tenemos la proyección $\pi : B_p(V) \longrightarrow V$

Ejercicio: Verifica que $\pi : B_p(V) \longrightarrow V$ es un morfismo proyectivo biracional

→ $B_p(V)$ es la **transformada estricta** de V bajo $\pi : B_p(\mathbb{A}^n) \to \mathbb{A}^n$.
El locus excepcional es $\pi^{-1}(p)$ y se llama **divisor excepcional**
↳ codim. 1

Ejemplo: $V = \mathbb{V}(x^2+y^2-z^2) \subset \mathbb{A}^3$



$0 \in V$ es un punto singular (clase pasada)

Construimos el blow up $B_0(V)$:

$$B = \{(x,\ell) \in \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2 : x \in \ell\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^3$$
$$(x,\ell) \longmapsto x$$

Recuerda que $\mathbb{P}^2$ tiene cobertura de parches afines

$$\mathbb{P}^2 = \underset{\mathbb{A}^2_{y,z}}{\underset{\shortparallel}{U_x}} \cup \underset{\mathbb{A}^2_{x,z}}{\underset{\shortparallel}{U_y}} \cup \underset{\mathbb{A}^2_{x,y}}{\underset{\shortparallel}{U_z}}$$

$\Rightarrow$ B también tiene una cobertura de tres cartas afines

$$B \subset \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2 \cong \underbrace{(\mathbb{A}^3 \times \mathbb{A}^2_{y,z})}_{\cong \mathbb{A}^5} \cup (\mathbb{A}^3 \times \mathbb{A}^2_{x,z}) \cup (\mathbb{A}^3 \times \mathbb{A}^2_{x,y})$$

$$\downarrow \pi$$

$$\mathbb{A}^3$$

Calculamos $\pi^{-1}(V)$ en cada carta, e.g.

$$V_z := \pi^{-1}(V) \cap \mathbb{A}^3 \times \mathbb{A}^2_{x,y}$$

$$= \{ (x,y,z), [x:y:z] : x^2+y^2=z^2, z \neq 0 \}$$

$$\cong \{ (x,y,z,u,v) : u^2+v^2=1, x=uz, y=vz \} \subset \mathbb{A}^5$$

La proyección $\mathbb{A}^5_{x,y,z,u,v} \xrightarrow{\pi|_{\mathbb{A}^3 \times \mathbb{A}^2_{x,y}}} \mathbb{A}^3_{z,u,v}$ manda V_z a

$$\{ (z,u,v) : u^2+v^2=1 \} \subset \mathbb{A}^3$$

que es un cilindro isomorfo a V_z.

$\Rightarrow$ $B_0(V)$ contiene un conjunto denso abierto isomorfo a un cilindro

La preimagen de $(0,0,0) \in V$ es el círculo

$$\{ z=0, u^2+v^2=1 \}$$