

El conjunto de funciones regulares en U se denota $\mathcal{O}_V(U)$.

Observación: $\forall V \subset \mathbb{A}^n$ cerrado $\Rightarrow \mathbb{C}[V] \subset \mathcal{O}_V(V)$

Ejemplo: Consideramos $U := \mathbb{A}^2 \setminus V(x) \xrightarrow{f} \mathbb{C}$
 $(x, y) \mapsto \frac{y}{x}$

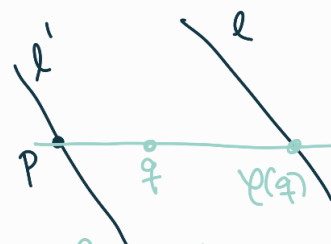
es regular en U .

Ejercicio: Sean $p \in \mathbb{A}^2$, $p \notin l \subset \mathbb{A}^2$ una línea y $p \in l' \parallel l$.
 Verifica que la proyección

$$\varphi: \mathbb{A}^2 \setminus l' \rightarrow l = \mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$$

$$q \mapsto \overline{qp} \cap l$$

es una función regular.



Teorema Sea $V \subset \mathbb{A}^n$ irreducible. Entonces cada función regular $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ es la restricción de una función polinomial $\ell: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{C}$ a V . Es decir, $\mathcal{O}_V(V) = \mathbb{C}[V]$.
no necesario, pero la prueba es más fácil en este caso

Prueba: P.D. $\mathbb{C}[V] \supset \mathcal{O}_V(V)$

Sea $g \in \mathcal{O}_V(V) \Rightarrow \forall p \in V \exists p \in U_p \subset V: g|_{U_p} = \frac{h_p}{k_p}|_{U_p}$
 donde $h_p, k_p \in \mathbb{C}[V]$ y $k_p(p) \neq 0$.

S. p. d. g. podemos suponer que $U_p = U_F = V \setminus V(F)$, $F \in \mathbb{C}[V]$
base de la top. de Zariski

Además, repitiendo el argumento de la prueba del Teorema anterior la cobertura $\{U_p\}_{p \in V}$ tiene una subcobertura

finita de forma $U_{F_1} \cup \dots \cup U_{F_t}$ donde $g|_{U_i} = \frac{h_i}{k_i}|_{U_i}$

$$Y \quad U_{F_i} = V \setminus V(F_i)$$

Cuidado: variedades casi-afines son casi-compactos (i.e. compactos en la topología de Zariski), pero no necesariamente compactos (i.e. compactos en la topología clásica) e.g. Variedades proyectivas son compactas y casi-compactas, el espacio afín es casi-compacto pero no es compacto (no es acotado trabajando sobre $\mathbb{C}$)

Observa que $V(k_1, \dots, k_t) = \emptyset$ porque $\{U_{F_i}\}_i$ es cobertura

Nullstellensatz
debil

$$(k_1, \dots, k_t) = \mathbb{C}[V]$$

es decir, $\exists l_1, \dots, l_t \in \mathbb{C}[V]: 1 = \sum_{j=1}^t l_j k_j$

$$\Rightarrow g = 1 \cdot g = \sum_{j=1}^t l_j k_j \frac{h_i}{k_i} \text{ en } U_{F_i}$$

$$\text{Definimos } f = \sum_{j=1}^t l_j h_j$$

P.D. $f = g$ como funciones en V

$$\text{Recorda que } g|_{U_{F_i}} = \frac{h_i}{k_i}|_{U_{F_i}}$$

$$\Rightarrow \frac{h_i}{k_i}|_{U_{F_i} \cap U_{F_j}} = \frac{h_j}{k_j}|_{U_{F_i} \cap U_{F_j}}$$

$U_{F_i} \cap U_{F_j} \subset V$ denso (falla si V no es irreducible)

$$\Rightarrow h_i k_j = k_i h_j \text{ como funciones polinómicas en } V$$

Entonces en cada U_{F_i} tenemos

$$g = 1 \cdot g = \left(\sum_{j=1}^t l_j k_j \right) \cdot \left(\frac{h_i}{k_i} \right) = \sum_{j=1}^t l_j (h_j k_i) \frac{1}{k_i} = \sum_{j=1}^t l_j h_j = f.$$

como $\{U_{F_i}\}_{i=1, \dots, t}$ es cobertura de V

$$\text{concluimos } g = f \in \mathbb{C}[V] \quad \square$$

Definición Sea U un abierto en una variedad casi proyectiva V . Una función $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ es **regular en un punto** $p \in U$ si existe un abierto afín $U_p \ni p$ y $f|_{U_p}$ es regular en p . f es **regular**, si es regular en cada punto y el conjunto de las funciones regulares se denota $\mathcal{O}_V(U)$.

Observaciones / Hechos

- I. $\mathcal{O}_V(U)$ es un $\mathbb{C}$ -álgebra con adición y multiplicación en cada punto
- II. Sean U_1, U_2 abiertos en $V \Rightarrow (f \in \mathcal{O}_V(U_2) \Rightarrow f \in \mathcal{O}_V(U_1))$
y la restricción define un homomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras
$$\mathcal{O}_V(U_2) \longrightarrow \mathcal{O}_V(U_1)$$
- III. Sean $f_i \in \mathcal{O}_V(U_i)$, $i=1,2$ t.q. $f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2}$
 $\Rightarrow \exists! f \in \mathcal{O}_V(U_1 \cup U_2) : f|_{U_i} = f_i$
- Se puede extender a una colección infinita de funciones que coinciden por pares en las intersecciones.
- IV. Sea $F: V \rightarrow W$ un morfismo de variedades casi proyectivas y $U \subset W$ abierto. Entonces para cada $f \in \mathcal{O}_W(U)$
$$F^*(f) = f \circ F \in \mathcal{O}_V(F^{-1}(U))$$

Comentarios

I, II, III $\mathcal{O}_V$ es una gavilla de $\mathbb{C}$ -álgebras en V
 $\hookrightarrow$ la gavilla estructural

IV Morfismos de variedades casi-proyectivas inducen morfismos de las gavillas estructurales.

Podemos reformular nuestra definición de morfismo de variedades casi-proyectivas sin la necesidad de fijar un empaje.

Definición:

Una aplicación $V \xrightarrow{\phi} W$ de variedades casi proyectivas es regular o un morfismo si cumple
 $\forall p \in V \exists p \in U \subset V$ y $\phi(p) \in U' \subset W$ abiertos t.q.
 $\phi|_U$ es definida por un conjunto de funciones regulares en las coordenadas de U .

Ejercicio: Verifica que esta definición de morfismo coincide con la versión anterior.

Anillo local de gérmenes y funciones racionales

[Hartshorne, I.3]

De ahora en adelante una variedad se refiere a una variedad casi-proyectiva (que incluye los casos de variedades afines, proyectivas y casi-afines)

↪ intersección de un abierto y un círculo en un espacio afín

Sea V una variedad y $p \in V$ un punto. Un **gérmen de una función regular en V cerca de p** es un par (U, f) donde

- $p \in U \subset V$ abierto
- $f \in \mathcal{O}_V(U)$

Definimos una relación de equivalencia en el conjunto de gérmenes identificando (U, f) y (U', g) si

$$f|_{U \cap U'} = g|_{U \cap U'}. \quad (*)$$

Ejercicio:

Verifica que funciones regulares son continuas y utiliza eso para mostrar que $(*)$ es una relación de equivalencia.

Definición Sea V una variedad y $\mathcal{O}(V)$ su anillo de funciones regulares. Para un punto $p \in V$ definimos el **anillo local de p en V** $\mathcal{O}_{p,V}$ (o $\mathcal{O}_p$) como el anillo de gérmenes de funciones regulares en V cerca de p .

Ejercicio:

Verifica que $\mathcal{O}_P$ es un anillo local cuyo campo residual es $\mathcal{O}_P/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$.

El ideal maximal es el conjunto de funciones regulares no cero en P . Si $f(P) \neq 0 \Rightarrow f$ es regular en una vecindad de P

Definición: Sea V una variedad ^(irreducible). Definimos su campo de funciones $\mathbb{C}(V)$ como sigue:

Los elementos de $\mathbb{C}(V)$ son pares (U, f) con $U \subset V$ un abierto y $f \in \mathcal{O}_U(U)$. Identificamos los pares como en $(*)$. Los elementos de $\mathbb{C}(V)$ se llaman funciones racionales.

Afirmación: $\mathbb{C}(V)$ es un campo

Adición y multiplicación:

V irreducible $\Rightarrow$ cada dos abiertos $U, U' \subset V$
cumplen $U \cap U' \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ podemos definir la adición y multiplicación en cada punto:

$$(U, f) \cdot (U', g) \text{ es } (U \cap U', fg)$$

$$(U, f) + (U', g) \text{ es } (U \cap U', f+g)$$

Inversas

Sea $(U, f) \in \mathbb{C}(V)$, definimos $U' = U \setminus (U \cap V(f))$
 $\subset V$ abierto

$\Rightarrow \frac{1}{f}$ es regular en U' y $(U', \frac{1}{f}) \in \mathbb{C}(V)$
es el inverso de (U, f) . //