Tenemos homomorfismos de anillos

$$\mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}_p \longrightarrow \mathbb{C}(V)$$

Ejercicio: Verifica que son inyectivas
*(puedes usar que funciones regulares son continuas)

$\star \Rightarrow$ si $f, g \in \mathcal{O}(V)$ y $\exists\ \emptyset \neq U \subset V$ abierto : $f|_U = g|_U$ entonces $f = g$ y $\mathbb{V}(f-g) \cap V = V$.

Proposición: [Hartshorne I Thm 3.2 (c) y Thm 3.4 (b) y (c)]

(1) Sea $V \subset \mathbb{A}^n$ variedad afín y $p \in V$ con ideal maximal asociado $m_p = \{ f \in \mathbb{C}[V] : f(p) = 0 \} \subset \mathbb{C}[V]$.
Tenemos
$$\mathcal{O}_p \cong \mathbb{C}[V]_{m_p} \quad \text{y} \quad \dim \mathcal{O}_p = \dim V.$$

(2) Sea $V \subset \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva y $p \in V$ con ideal maximal asociado $m_p = \{ f \in \mathbb{C}[V] \text{ homog.} : f(p) = 0 \} \subset \mathbb{C}[V]$
Entonces,
$$\mathcal{O}_p \cong \mathbb{C}[V]_{m_p} \quad \text{y} \quad \mathbb{C}(V) \cong \mathbb{C}[V]_{((0))}$$

Prueba: (1) Ya vimos que $\mathcal{O}(V) = \mathbb{C}[V]$
Para $p \in V$ consideramos la localización de $\mathbb{C}[V]$ en $m_p = \{ f \in \mathbb{C}[V] : f(p) = 0 \}$

$$\mathbb{C}[V]_{m_p} = (\mathbb{C}[V] \setminus m_p)^{-1} \mathbb{C}[V] \overset{\text{por def.}}{\subset} \mathcal{O}_p$$

En la prueba del Teorema $\mathcal{O}(V) = \mathbb{C}[V]$ vimos que cada $g \in \mathcal{O}_V(U)$ con $p \in U$ es de la forma $\frac{f}{h} \in \mathbb{C}[V]_{m_p} \Rightarrow \mathbb{C}[V]_{m_p} \supset \mathcal{O}_p$.

Como $\mathcal{O}_p$ es anillo local tenemos

$$\dim \mathcal{O}_p = ht(m_p)$$

Además tenemos $\mathbb{C}[V]/m_p \cong \mathbb{C}$ y por lo tanto $\dim Y = \dim \mathbb{C}[V] = \dim \mathcal{O}_p$. //

(2) Empezamos con

Ejercicio: Sea $V_i = V \cap U_i \subset U_i \cong \mathbb{A}^n$. Entonces

$$\mathbb{C}[V_i] \cong \mathbb{C}[V]_{(x_i)}$$

anillo de coord. de la variedad afín V_i

anillo de coord. homog. de la variedad proy. V localizado en x_i.

Sea $p \in V$ un punto y i t.q. $p \in V_i$. Entonces de (1) sabemos que $\mathcal{O}_p \cong \mathbb{C}[V_i]_{m'_p}$

donde m'_p es el ideal correspondiente a $p \in V_i$

Tenemos que $m'_p = m_p \mathbb{C}[V]_{(x_i)}$

ideal de $p \in V$

Observa que $x_i \notin m_p$ ($p \in V_i$) y localización es transitiva $\Rightarrow \mathbb{C}[V_i]_{m'_p} \cong \mathbb{C}[V]_{(m_p)}$

$$\mathcal{O}_p \overset{(1)}{\cong} \mathbb{C}[V_i]_{m'_p}$$

Para ver que $\mathbb{C}(Y) \cong \mathbb{C}[Y]_{((0))}$ calculamos

$$\mathbb{C}(Y) = \mathbb{C}(Y_i) = \mathrm{Frac}(\mathbb{C}[Y_i])$$
$$= \mathbb{C}[Y_i]_{((0))} = (\mathbb{C}[Y]_{(x_i)})_{((0))} = \mathbb{C}[Y]_{((0))}$$

relación de equivalencia

$\mathbb{C}[Y_i]$ es dominio

Ejercicio anterior

$x_i \in \mathbb{C}[Y] \setminus \{0\}$

$\square$

[Smith §5.1-5]

§ Aplicaciones de Veronese : ejemplos de morfismos de variedades casi-proyectivas

Recuerda: los monomios de grado $d \geq 0$ en $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ forman un espacio vectorial. ¿Cuál es su dimensión? (por inducción)

es $\binom{d+n}{d} = \#\{(d_0, \dots, d_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1} : \sum_{i=0}^{n} d_i = d\}$

$= \#$ monomios de grado d

Definición: La d-ésima aplicación de Veronese de $\mathbb{P}^n$ es el morfismo

$$\nu_d : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^m \qquad m = \binom{d+n}{d} - 1$$

$$[x_0 : \dots : x_n] \longmapsto [\underbrace{x_0^d : x_0^{d-1} x_1 : \dots : x_n^d}_{\text{todos los monomios de grado } d}]$$

↳ Verifique que es biendefinida

Proposición: ν_d es un isomorfismo entre $\mathbb{P}^n$ y su imagen. Es decir, es un encaje de variedades algebraicas.

Prueba: Describimos la aplicación inversa. Sea $W \subset \mathbb{P}^m$ la imagen de ν_d. Las coordenadas de $\mathbb{P}^m$ son indexadas por los monomios de grado d en $n+1$ variables. Introducimos la notación z_I para las coordenadas de $\mathbb{P}^m$ donde

$$I = (i_0, \dots, i_n) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1} \quad \text{con } |I| := i_0 + \dots + i_n = d.$$

Observa que para cada punto en W al menos una de las coordenadas $x_j^d = z_{(0,\dots,0,\underset{\uparrow j}{d},0,\dots,0)}$, $j \in [0,n]$ es no cero.

Sea $U_j = W \cap \{x_j^d \neq 0\}$. Entonces $U_0, \dots, U_n$ es una cobertura de W. Definimos la inversa localmente:

$$\varphi_j : U_j \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

$$z \longmapsto [z_{(1,0,\dots,\underset{j}{d-1},\dots,0)} : z_{(0,1,\dots,\underset{j}{d-1},\dots,0)} : \dots : z_{(0,\dots,\underset{j}{d-1},0,\dots,1)}]$$

corresponden a los monomios $x_0 x_j^{d-1}, x_1 x_j^{d-1}, \dots, x_j^{d-1} x_n$

Ejercicio: ① Verifica que los φ_j definen un morfismo $\varphi: W \to \mathbb{P}^n$
es decir, p.d. $\varphi_j|_{U_i \cap U_j} = \varphi_i|_{U_i \cap U_j}$

② Demuestra que φ es la inversa de ν_d.

$\square$

Ejemplos:

① $n=1, d=2$ es $\nu_2 : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$

$$[s:t] \longmapsto [s^2 : st : t^2]$$

Ya vimos que la imagen es $\mathbb{V}(xz - y^2)$ y que ν_2 es un isomorfismo a su imagen.

② $n=1, d=3$ es $\nu_3 : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$

$$\begin{array}{c} \\ [s:t] \longmapsto \end{array} \begin{array}{ccccccc} x & & y & & z & & w \\ [s^3 & : & s^2 t & : & st^2 & : & t^3] \end{array}$$

Su imagen W se llama la curva racional normal y es la cerradura proyectiva de la curva cúbica torcida:

$$\mathbb{V}(x - yz, y - z^2) = W \cap \{w \neq 0\} \subset U_w = \mathbb{A}^3$$

Los polinomios que determinan W son

$$xw - yz, \quad wy - z^2 \quad y \quad y^2 - xz$$

③ $n=1$ la imagen de $\nu_d : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^d$ es una curva $C \subset \mathbb{P}^d$ (isomorfa a $\mathbb{P}^1$ como variedad proyectiva) que se llama la curva racional normal de grado d. Las ecuaciones que determinan a C son los 2-menores de la matriz

$$\begin{bmatrix} z_{0,d} & z_{1,d-1} & \cdots & z_{d-1,1} & z_{d,0} \\ z_{1,d-1} & z_{2,d-2} & \cdots & z_{d,0} & z_{0,d} \end{bmatrix}$$

Ejercicio: verifica que los 2-menores de la matriz se anulan en la imagen de ν_d.