§ El espectro de un anillo

El espectro maximal de un anillo R es el conjunto de sus ideales maximales

$$\max\mathrm{Spec}(R) = \{ m \subset R : m \text{ es ideal maximal} \}$$

La correspondencia de variedades afines algebraicas

$$V \leftrightarrow \max\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[V])$$

no solo vale a nivel de conjuntos pero también topológicamente:

- los conjuntos cerrados (Zariski) en $\max\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[V])$ son los ideales maximales en $\mathbb{C}[V]$ que contienen algún ideal fijo de $\mathbb{C}[V]$ (que corresponde a una subvariedad $W \subset V$)
- dado un morfismo $F: V \to W$ y un punto $p \in V$ podemos interpretar p como un ideal maximal $m \subset \mathbb{C}[V]$

  $\Rightarrow$ $(F^{\#})^{-1}(m) \subset \mathbb{C}[W]$ es un ideal maximal y → Ejercicio

  por lo tanto en $\max\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[W]$

$$\Rightarrow \quad \max\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[V] \xrightarrow{F} \max\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[W]$$
$$m \longmapsto (F^{\#})^{-1}(m)$$

Sea ahora R cualquier anillo conmutativo. Definimos la topología de Zariski en $\max\mathrm{Spec}\,R$: los conjuntos cerrados son

$$\mathbb{V}(I) := \{ m \in \max\mathrm{Spec}\,R : m \supset I \}, \quad I \subset R \text{ ideal}$$

Dado un homom. de anillos $\sigma: R \to S$ desafortunadamente no tenemos que $\sigma^{-1}(m) \subset R$ es maximal si $m \subset S$ lo es

Ejemplo: Consideramos $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ y el ideal maximal $\{0\} \subset \mathbb{Q}$ pero su preimagen $\{0\} \subset \mathbb{Z}$ no es maximal (pero primo).

↳ En general, la preimagen de un ideal primo es primo

Definición: Sea R un anillo conmutativo, definimos su espectro

$$\operatorname{Spec} R = \{ p \subset R : \ p \text{ ideal primo} \}$$

$\operatorname{Spec} R$ es un espacio topologico con la topologia de Zariski:

conjuntos cerrados son $V(I) := \{ p \in \operatorname{Spec} R : p \supset I \}$ $\forall I \subset R$ ideal

se llama un esquema afín (Grothendieck)

Nota que $\operatorname{maxSpec} R \subset \operatorname{Spec} R$ es un subespacio topologico.

Tarea

1. Verifica que $\operatorname{Spec} R$ es un espacio topologico.
2. Muestra que $p \in \operatorname{Spec} R$ es un punto cerrado $\Leftrightarrow$ $p \subset R$ es maximal
3. Verifica que $\operatorname{maxSpec} \mathbb{Z} = \{ (p) : p \in \mathbb{Z} \text{ primo} \}$ y que $(0) \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ es un punto denso, es decir esta contenido en cualquier conjunto abierto no vacío.
4. Sea $R = \mathbb{C}[x,y]/(x^2)$. Muestra que $\operatorname{maxSpec} R$ es homeomorfa a $\mathbb{A}^1$ (eso muestra la idea de esquemas, $\operatorname{maxSpec} R$ se puede pensar como el eje y con multiplicidad dos)

§ Dimensión de Krull y grado de trascendencia
(Kemper, §5)

Sea $\mathcal{M}$ un conjunto. Una cadena en $\mathcal{M}$ es un subconjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ ordenado totalmente por inclusión: $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n$
y su longitud es $|\mathcal{C}|-1 \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1, \infty\}$
↳ en caso de $\emptyset$

Ejemplo: Si V es un espacio vectorial tenemos
$$\dim V = \text{longitud}(\{U \subset V \text{ subespacio vectorial}\})$$

Definición Sea X un espacio topológico y $\mathcal{M}$ el conjunto de cerrados irreducibles en X. La dimensión de Krull de X es
$$\dim X := \text{length}(\mathcal{M}) := \sup\{\text{longitud de } \mathcal{C} \subset \mathcal{M} \text{ cadena}\}$$
Sea R un anillo. Definimos la dimensión de Krull de R
$$\dim R := \dim \operatorname{Spec} R$$
↳ longitud maximal de una cadena de ideales primos de R

Observación

Sea $V \subset \mathbb{A}^n$ una variedad afín y $K[V]$ su anillo de coordenadas ($K = \overline{K}$). Entonces, $\dim V = \dim K[V]$.

Ejemplos
(1) Si $X = \{p\}$ entonces $\dim X = 0$, si $X = \emptyset$ entonces $\dim X = -1$.

Ejercicio:
Verifica que $\dim K = 0$ para cualquier campo K
¿Cuál es $\dim \mathbb{Z}$?

Vamos a ver otra manera de calcular la dimensión a través de grado de trascendencia

Sea A una K-algebra y $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ un conjunto de n elementos. $\{a_1, \dots, a_n\}$ es algebraicamente independiente sobre K si para todos $f \in K[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ se cumple. $f(a_1, \dots, a_n) \neq 0$

Definición Sea A un K-algebra, K un campo. El grado de trascendencia de A es

$$\operatorname{trdeg}(A) := \sup\{|T| : |T| \subset A \text{ finito y alg. indep.}\}$$

Observamos que $\operatorname{trdeg}(A) \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1, \infty\}$ donde $\operatorname{trdeg}(A) = -1$ si $A = \{0\}$ (declaramos $\sup \emptyset := -1$)

Ejemplo Sea $A = K[X]$ el anillo de coordenadas de una variedad algebraica afín y K infinito. Tenemos

$$\underbrace{\begin{matrix}\{a_1, \dots, a_n\} \subset A \\ \text{alg. indep.}\end{matrix}} \longleftrightarrow \begin{matrix} K[x_1, \dots, x_n] \to A \\ \text{homom. iny.}\end{matrix} \longleftrightarrow \begin{matrix} X \longrightarrow \mathbb{A}^n \\ \text{morf. dominante}\end{matrix}$$

para $A \cong K[x_1, \dots, x_m]/I$ se puede encontrar de manera algorítmica utilizando las bases de Gröbner

Teorema
Sea A un algebra finitamente generada sobre un campo K.
Entonces, $\dim(A) = \operatorname{trdeg}(A)$

Prueba: (1) $\dim(A) \leq \operatorname{trdeg}(A)$ no requiere A fin. gen.

Vamos a verificar más general lo siguiente:
Sea $S \subseteq A$ un conjunto generador. Entonces,

$$\dim(A) \leq \sup\{|T| : T \subseteq S \text{ finito y alg. indep.}\} =: n \quad (\star)$$

El caso $S = A$ implica (1)

Supongamos $n \in \mathbb{N}_0$ (casos $n \in \{-1, \infty\}$ son ciertos)

P.D. $\dim(A/P) \leq n \quad \forall P \in \operatorname{Spec}(A)$

Sin perder de generalidad supongamos A es dominio

(pues $A \to A/P$ y $S \leftrightarrow \{a+P : a \in S\} \Rightarrow n$ no puede crecer)

Caso $n=0$ $\Rightarrow$ todos los elementos de S son algebraicos y el campo de fracciones $\operatorname{Quot}(A)$ es una extensión algebraica de K. $\Rightarrow \operatorname{Quot}(A)$ algebraico $\Rightarrow A$ algebraico $\Rightarrow A$ es un campo $\Rightarrow \dim A = 0$.

Caso $n>0$ Sea $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_m$ una cadena de $\operatorname{Spec}(A)$ de longitud m.

$\Rightarrow \quad P_0 \subsetneq P_2/P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m/P_1$ es cadena de longitud $m-1$ en $\operatorname{Spec}(A/P_1)$

P.D. Cada conjunto alg. indep. $T \subseteq \{a+P_1 : a \in S\} \subseteq A/P_1$ tiene cardinalidad $< n$

(así por inducción podemos concluir $\dim(A/P_1) < n$, $m-1 < n$)

Supongamos $\exists\, a_1, \ldots, a_n \in S$ t.q. $\{a_1+P_1, \ldots, a_n+P_1\} \subseteq A/P_1$ alg. indep.

Tenemos $\forall a \in S$: a algebraico sobre $L := \operatorname{Quot}(K[a_1, \ldots, a_n])$

$\Rightarrow \operatorname{Quot}(A)$ algebraic sobre L

Sea $a \in P_1$ no cero $\Rightarrow \exists\, G = \sum_{i=0}^{k} g_i x^i \in L[x]$ con $G(a) = 0$

$a \neq 0 \Rightarrow$ s.p.d.g. $g_0 \neq 0$ y $g_i \in K[a_1, \ldots, a_n]$

Entonces,

$$g_0 = -\sum_{i=1}^{k} g_i a^i \in P_1$$

interpretamos g_0 como polinomio $\Rightarrow g_0(a_1+P_1, \ldots, a_n+P_1) = 0$ $\lightning$ a_i+P_1 alg. indep.

$\Rightarrow$ (☆)

TAREA: Utilizando (☆) demuestra que para K un campo

$\dim K[x_1, \ldots, x_n] = n$ y $\dim(K^n) = \begin{cases} n & K \text{ infinito} \\ 0 & K \text{ finito.} \end{cases}$

(2) $\mathrm{trdeg}(A) \leq \dim(A)$

PD. $\mathrm{trdeg}(A) \geq n \Rightarrow \dim(A) \geq n$ por inducción

s.p.d.g. $n > 0$

Sean $a_1, \dots, a_n \in A$ alg. indep.

A Noetheriano $\Rightarrow \exists$ un número finito de ideales primos minimales $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_r$ de A

Supongamos que $\forall\, i \in [r]$ $a_1 + \mathfrak{M}_i, \dots, a_n + \mathfrak{M}_i \in A/\mathfrak{M}_i$ son algebraicamente dependientes.

$\Rightarrow \exists\ f_i \in K[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ t.q. $f_i(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{M}_i$

$\Rightarrow \quad a := \prod f_i(a_1, \dots, a_n) \in \bigcap \mathfrak{M}_i = \mathrm{nil}(A)$

nilradical de $A = \sqrt{\{0\}}$

$\Rightarrow \exists\, k : a^k = 0$

$\Rightarrow \quad f := \prod f_i^k \neq 0$ tenemos $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ $\lightning$ a_i alg. indep.

$\Rightarrow \exists\, i : a_1 + \mathfrak{M}_i, \dots, a_n + \mathfrak{M}_i$ son alg. indep.

y es suficiente verificar $\dim(A/\mathfrak{M}_i) \leq n$.

entonces wlog podemos suponer que A es dominio.

Sea $L := \mathrm{Quot}(K[a_1]) \subset \mathrm{Quot}(A)$ y $A' := L \cdot A \subset \mathrm{Quot}(A)$

$\Rightarrow$ A' es L-dominio finitamente generado y $a_2, \dots, a_n \in A'$ son alg. indep. $/ L$

Inducción $\Rightarrow$ $\exists$ cadena

$$P'_0 \subsetneq P'_1 \subsetneq \dots \subsetneq P'_{n-1} \quad \text{en } \mathrm{Spec}(A')$$

Sea $P_i := A \cap P'_i \in \mathrm{Spec}(A) \Rightarrow P_{i-1} \subseteq P_i \quad \forall\, i = 1, \dots, n-1$

De hecho $P_{i-1} \subsetneq P_i$ pues $L \cdot P_i = P'_i \ \forall\, i$.

Además $L \cap P_{n-1} = \{0\}$ (de lo contrario P'_{n-1} contiene una unidad $\Rightarrow P'_{n-1} = A'$)

Entonces $a_1 + P_{n-1} \in A/P_{n-1}$ no es algebraico $/ K$

$\Rightarrow A/P_{n-1}$ no es un campo

$\Rightarrow P_{n-1}$ no es un ideal maximal

Sea $P_n \subset A$ un ideal maximal que contiene P_{n-1}

$\Rightarrow P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_{n-1} \subsetneq P_n$

es una cadena en $\mathrm{Spec}(A)$ y $\dim(A) \geq n$. $\square$