

§2 Variedades Projectivas

§ El espacio proyectivo - una compactificación natural de $\mathbb{A}^n$

Definición: El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión uno de $\mathbb{C}^{n+1}$ (es decir, es el espacio de líneas en $\mathbb{C}^{n+1}$ que contienen el origen)
(podemos cambiar $\mathbb{C}$ por cualquier otro campo)

Interpretación alternativa: $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida por

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : (y_0, \dots, y_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$$

las clases de equivalencia son

$$[x_0 : \dots : x_n] = \{ (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) : \lambda \in \mathbb{C} \} \in \mathbb{P}^n$$

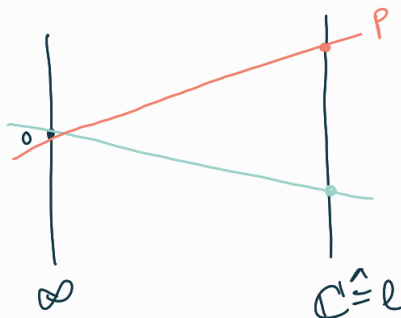
donde al menos una de las $x_i \neq 0$.

→ Notación para distinguir

Las coordenadas de $\mathbb{P}^n$ se llaman **coordenadas homogéneas** enfatizando que solo se trata de representantes de las clases de equivalencia.

Ejemplo: $\mathbb{P}^1 = \{ \text{líneas en } \mathbb{C}^2 \text{ que pasan por } (0,0) \}$

Fijemos una línea l en $\mathbb{C}^2$ que NO contiene $(0,0)$ y tomamos los puntos de intersección $l \cap p$, $p \in \mathbb{P}^1$:



El único punto en $\mathbb{P}^1 \in \mathbb{P}^1$ con $p \cap l = \emptyset$ es el que corresponde a la línea paralela $\rightarrow p_\infty$ representa el ∞ en $\mathbb{P}^1$, tenemos

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$[x_0 : x_1] \mapsto \begin{cases} \frac{x_1}{x_0} & x_0 \neq 0 \\ \infty & x_0 = 0 \end{cases}$$

De manera similar podemos visualizar $\mathbb{P}^2$: fijamos un plano $H \subset \mathbb{C}^3$ que no contiene $(0,0,0)$.

Los únicos puntos en $\mathbb{P}^2$ con $p \cap H = \emptyset$ son aquellos que están en el plano $H_\infty = \{0\}$ paralelo a H :

$\hookrightarrow$ nos da una copia de $\mathbb{P}^1$ que representa los puntos en el infinito.

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{P}^1 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Más general tenemos

Ejercicio: verifica que $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}$

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mapsto \begin{cases} (\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) & x_0 \neq 0 \\ [x_1 : \dots : x_n] & x_0 = 0 \end{cases}$$

Identificamos $U_0 \subset \mathbb{P}^n$ con los puntos con $x_0 \neq 0$.

Podemos suponer $x_0 = 1$ (cambiando el representante):

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}] \mapsto (1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) \in \mathbb{C}^{n+1}$$

De manera análoga podemos cambiar x_0 por cualquier otra coordenada x_i y definir

$$U_i = \{ [x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0 \} \cong \mathbb{A}^n$$

Observamos:

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{j=0}^n U_j$$

Bajo cambios de coordenadas podemos observar que cada colección de $n+1$ hiperplanos linealmente independientes que contienen el origen en $\mathbb{C}^{n+1}$ definen una cobertura de $\mathbb{P}^n$.

Topología de $\mathbb{P}^n$:

De ser cociente de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ $\mathbb{P}^n$ obtiene la topología cociente Euclidiana:

$p, q \in \mathbb{P}^n$ están "cerca" si $\angle(l_p, l_q)$ es pequeño

↳ los U_i son abiertos en esta topología y homeomorfos a $\mathbb{C}^n$ (con topología Euclidiana)

↳ los $U_i \subset \mathbb{P}^n$ son densos y sus complementos son $\mathbb{P}^{n-1}$ → de dimensión más baja

↳ las intersecciones $U_i \cap U_j \subset \mathbb{P}^n$ son densos ($i \neq j$)

Afirmación:

$\{U_i\}_{i \in \{0, \dots, n\}}$ es un atlas de $\mathbb{P}^n$ y $\mathbb{P}^n$ es una variedad compleja (manifold) de dim. n .

Tenemos las aplicaciones

$$\psi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^n, [x_0: \dots: x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

P.D.: $\psi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\psi_j \circ \psi_i^{-1}} \psi_j(U_i \cap U_j)$ es homeomorfa

sin perder de generalidad sea $i=0, j=n \quad \forall i \neq j$
(de lo contrario aplicamos una permutación)

Calculamos

$$\psi_0 \circ \psi_n^{-1}(\underbrace{a_1, \dots, a_n}_{\psi_n(U_0 \cap U_n)}) = \psi_n([1: a_1: \dots: a_n]) = \left(\frac{1}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_n} \right)$$

$\Rightarrow \psi \circ \psi^{-1} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es racional y por lo tanto holomorfa. //

Comentario: Variedades algebraicas abstractas

En el ejemplo de $\mathbb{P}^n$ podemos sustituir la topología Euclidiana por la topología de Zariski. Pegando variedades algebraicas afines por aplicaciones racionales uno llega al concepto de una variedad algebraica abstracta (esencialmente un espacio topológico con una cobertura de abiertos que son variedades algebraicas afines pegadas por morfismos).

§ Variedades Proyectivas

Recordar: no existen funciones analíticas no constantes en la esfera de Riemann $\mathbb{P}^1$.

$\Rightarrow$ no existen funciones polinomiales no constantes en $\mathbb{P}^1$

$\Rightarrow$ no podemos "copiar" la definición de variedades afines tomando conjuntos de ceros en curvas de funciones polinomiales en $\mathbb{P}^n$.

Para evitar este problema consideramos funciones polinomiales homogéneas en $\mathbb{C}^{n+1}$:

$f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ es homogénea si todos sus términos tienen el mismo grado (donde $\deg(x_i) := 1$)

Ejercicio: El conjunto de ceros de un polinomio homogéneo $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ es bien definido en $\mathbb{P}^n$.