

Corollary Sea $\nu_d: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m$ la d -ésima aplicación de Veronese y sean $\{z_I : I = (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}, \sum_{j=0}^n i_j = d\}$ las coordenadas homogéneas de $\mathbb{P}^m$, $m = \binom{n+d}{d}$.

La variedad proyectiva $W := \text{im}(\nu_d) \subset \mathbb{P}^m$ es definida por las ecuaciones

$$\{z_I z_J - z_K z_L : I, J, K, L \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}, I+J = K+L\}$$

§5.3 Aplicación de Segre y productos de variedades

Recordar: La topología de Zariski inducida como topología de producto en $A' \times A'$ no es la topología de Zariski en A^2
 $(\Delta \subset A^2 \text{ es cerrado} = \forall (x-y) \text{ pero } \Delta \subset A' \times A'$
 cerrado $\Rightarrow A'$ es Hausdorff $\nleftrightarrow$)

La aplicación de Segre es un embejamiento de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ como cerrado en un espacio proyectivo de dimensión más alta:

Ejemplo: La aplicación de Segre $\Sigma_{1,1}: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ es definida

$$([s:t], [u:v]) \mapsto \begin{bmatrix} x & y & z & w \\ su & sv & tu & tv \end{bmatrix}$$

Nota que es bienviada (las coordenadas no se anulan simultáneamente y no depende del representante)

Además, su imagen es $\mathbb{V}(xz-yw) \subset \mathbb{P}^3$.

Localmente en $U_t \times U_v \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ observamos

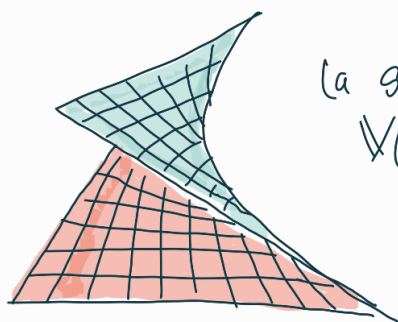
$$([s:1], [u:1]) \mapsto [su : s : u : 1] \in \mathbb{P}^3$$

" $\cup$
 $(su, s, u) \in U_w$

Fijando $s = \lambda \in \mathbb{C}$ vemos que $\{(\lambda u, \lambda, u) : u \in A^1\}$ es una línea en $U_w \subset \mathbb{P}^3$. Variando λ observamos que la imagen de $\Sigma_{1,1}|_{U_t \times U_v} \subset \mathbb{P}^3$ es una familia de líneas disjuntas.

-lema popular
en el examen general

una superficie con esta propiedad se llama una superficie reglada. Intercambiando los roles de s y u llegamos a la misma observación:



la superficie reglada

$$V(xw-yz) \subseteq \mathbb{A}^3 = U_w \subset \mathbb{P}^3$$

Definición: La aplicación general de Segre $\Sigma_{m,n}$ es

$$\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$$

$$([x_0: \dots: x_m], [y_0: \dots: y_n]) \longmapsto \begin{matrix} [x_0 y_0 : x_0 y_1 : \dots : x_0 y_n : \\ z_{00} \quad z_{01} \quad \quad \quad z_{0n} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x_m y_0 : x_m y_1 : \dots : x_m y_n : \\ z_{m0} \quad z_{m1} \quad \quad \quad z_{mn} \end{matrix}$$

Es decir, la imagen de $\Sigma_{m,n}$ es de la forma

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 & \dots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{00} & \dots & z_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{m0} & \dots & z_{mn} \end{bmatrix}$$

Teorema: La imagen de la aplicación de Segre $\Sigma_{m,n}$ es una variedad proyectiva definida por los 2-menores de la matriz $(z_{ij})_{i \in [0,m], j \in [0,n]}$ en $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$.

Además,

- $\Sigma_{m,n}$ es uno-a-uno. ($\Sigma_{m,n}(pt) = \{pt\}$)
- la proyección $[(z_{ij})] \mapsto [z_{00} : z_{01} : \dots : z_{0n}]$ induce un morfismo $\text{im}(\Sigma_{m,n}) \rightarrow \mathbb{P}^m \quad \forall l \in [0,n]$
- la proyección $[(z_{ij})] \mapsto [z_{m0} : z_{m1} : \dots : z_{mn}]$ induce un morfismo $\text{im}(\Sigma_{m,n}) \rightarrow \mathbb{P}^m \quad \forall k \in [0,n]$.

Prueba: la imagen de $\Sigma_{m,n}$ escrita en forma de una matriz $(m+1) \times (n+1)$ es

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} [y_0 \dots y_n] = \begin{bmatrix} z_{00} & \dots & z_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{m0} & \dots & z_{mn} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ cada columna es un múltiplo de $[x_0 \dots x_m]^T$

$\Rightarrow$ la matriz tiene rango 1.

$\Rightarrow$ los menores 2×2 se anulan

Para verificar la inclusión opuesta consideramos un punto en $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ que satisface

$$z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj} = 0 \quad \forall \begin{matrix} 0 \leq i, k \leq m \\ 0 \leq j, l \leq n \end{matrix}$$

Escribiendo las coordenadas del punto en forma de una matriz vemos que todos sus 2×2 -menores se anulan

$\Rightarrow$ la matriz es de rango 1

alq

$\Rightarrow$ la matriz es de la forma $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} (y_0 \dots y_n)$

lin.

donde $(x_0 \dots x_m)$ y $(y_0 \dots y_n)$ son determinadas bajo múltiples escalares.

Además, la matriz no puede ser cero (en $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$) entonces tampoco $[x_0 \dots x_m]$ y $[y_0 \dots y_n]$ pueden ser cero.

$$\Rightarrow \text{Im}(\Sigma_{m,n}) = \bigvee \{ (z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj} : i, k \in [0, m], j, l \in [0, n]) \}$$

$\rightarrow$ También implica que $\Sigma_{m,n}$ es 1-1.

Consideramos la proyección

$$\text{Im}(\Sigma_{m,n}) \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}^m$$

$$[z_{ij}] \mapsto [z_{0j} \dots z_{mj}] \quad j \in [0, n]$$

como las columnas solo difieren por un escalar la proyección es bien definida. Cambiando columnas por filas es análogo

