Ejercicio Fijamos $p=[p_0:\dots:p_n]\in\mathbb{P}^n$. Verifica que

$$\mathbb{P}^m \xrightarrow{\Sigma_{m,n}(-,p)} \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}^m$$

$$x \longmapsto \Sigma_{m,n}(x,p)$$

es la identidad.

Observación: Si $X\subset\mathbb{P}^m$ y $Y\subset\mathbb{P}^n$ son variedades proyectivas podemos usar la aplicación de Segre para darle estructura de variedad casi proyectiva a su producto:

$$\Sigma_{m,n}\big|_{X\times Y} : X\times Y \longrightarrow \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$$

Por ligero abuso de notación escribimos

$$X\times Y := \Sigma_{m,n}(X\times Y)\subset\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$$

Es decir, identificamos el producto $X\times Y$ con la variedad casi-proyectiva que es su imagen bajo $\Sigma_{m,n}$.

El producto viene con proyecciones naturales

$$\begin{tikzcd} & X\times Y \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

que son restricciones de las proyecciones

$$\begin{tikzcd} & \Sigma_{m,n}(\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n) \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathbb{P}^m & & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

definidas en la prueba anterior.

§ Grado e intersecciones completas

Para clasificar variedades proyectivas la búsqueda de invariantes (bajo equivalencia proyectiva) ha sido un área de investigación muy fructífero.

Definición: Sea $V \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva. Su **grado** es

$$\deg V := \max \left\{ \#(V \cap L) < \infty \; : \; \begin{array}{l} L \subset \mathbb{P}^n \text{ lineal} \\ \dim L + \dim V = n \end{array} \right\}$$

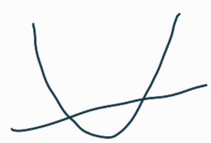
el grado se alcanza para casi todo $L \subset \mathbb{P}^n$ que es "genérico" o "suficientemente general" de dim $=$ codim $V =: k$

Se puede hacer preciso considerando la Grassmanniana

$Gr_{k,n} = \{ L \subset \mathbb{P}^n \text{ lineal de dim. } k \} \subset \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ var. proy.

Existe $U \subset Gr_{k,n}$ denso y L es "genérico" $\Leftrightarrow$ $L \in U$.

Ejemplo: $V = \mathbb{V}(yz - x^2) \subset \mathbb{P}^2$



$\mathbb{A}^2 = U_z \subset \mathbb{P}^2$

Teorema: Si $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ es irreducible y de grado d entonces $\deg(\mathbb{V}(F)) = d$.

Prueba: Sea $L \subset \mathbb{P}^n$ línea arbitraria. $\mathbb{V}(F) \cap L$ son los ceros de F en L. Consideramos $F|_L$.

$L \cong \mathbb{C} \Rightarrow F|_L$ corresponde a un polinomio de grado d en una variable

Teorema fund. alg. $\Rightarrow$ $F|_L$ tiene d raíces que son distintas si L es genérico. $\square$

Comentario: Tenemos $F|_L = F(t) = (t-a_1)^{m_1} \cdots (t-a_r)^{m_r}$

$\mathbb{V}(F(t)) \subset \mathbb{A}^1$ son r puntos $\{a_1, \dots, a_r\}$

pero así olvidamos las multiplicidades de los a_i

El esquema $\operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[t]/_{(F(t))}\right)$ son los mismos puntos con sus multiplicidades (orden de caso de $F(t)$)

el esquema es una degeneración de la variedad donde puntos pueden coincidir y así obtener multiplicidad

En general:

$$\left\{\begin{matrix}\text{subvariedades} \\ \text{de } \mathbb{A}^n\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{ideales radicales} \\ \text{en } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{subesquemas} \\ \text{de } \mathbb{A}^n\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{ideales en} \\ \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\end{matrix}\right\}$$

Proposición: El grado de una variedad proyectiva $V \subset \mathbb{P}^n$ es una invariante proyectiva: si $\mathbb{P}^n \xrightarrow{T} \mathbb{P}^n$ es un automorfismo entonces

$$\deg(V) = \deg(T(V))$$

bajo equivalencia proyectiva

Prueba: T es un cambio lineal de coordenadas que preserva subespacios lineales en $\mathbb{P}^n$.

⚠ El grado <u>no</u> es una invariante bajo isomorfismo.

Ejemplo: La curva racional normal de grado 3 V es la imagen de

$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\nu_3} \mathbb{P}^3$$
$$[s:t] \longmapsto [\overset{x}{s^3} : \overset{y}{s^2 t} : \overset{z}{s t^2} : \overset{w}{t^3}]$$

En la carta afín U_w es la cúbica torcida

$$\mathbb{V}(z^2 - y, z^3 - x) = \mathbb{V}(z^2 - y) \cap \mathbb{V}(z^3 - x)$$

Observamos que
$\deg V = 3$

Pero V es isomorfa a $\mathbb{P}^1$ que tiene grado 1

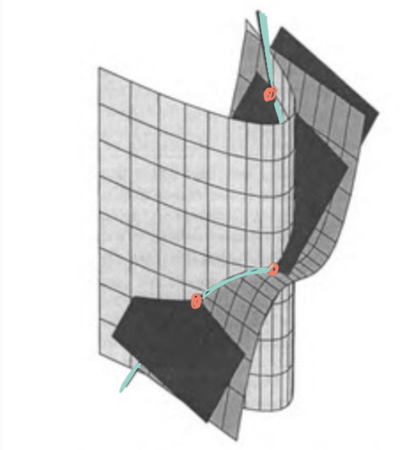


Figure 5.4. The twisted cubic has degree three

por ejemplo:

$$\iota : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$$
$$[s:t] \longmapsto [s:t:0:0]$$

es un encaje lineal, es decir $\iota(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$ es una línea $\Rightarrow$ tiene grado 1.

Pregunta: ¿Cómo determinar el grado de una variedad que no es hipersuperficie?

Idea naiv: ¿ $\deg \mathbb{V}(F_1, \dots, F_c) = \deg F_1 \cdot \deg F_2 \cdots \deg F_c$?

Ejercicio: Muestra que la cúbica torcida no tiene presentación $\mathbb{V}(F_1, \dots, F_c)$ con $3 = \deg F_1 \cdot \deg F_2 \cdots \deg F_c$

Caso 1: $\exists!\ i$ con $\deg F_i = 3$ y $\deg F_j = 1 \ \forall j \neq i$

$$V = \{[s^3 : s^2t : st^2 : t^3] \in \mathbb{P}^3 : [s:t] \in \mathbb{P}^1\}$$

Supongamos $t=1$ y $F_j = ax + by + cz + dw$

$\Rightarrow \quad as^3 + bs^2 + cs + d = 0$

si $s \neq 0 \Rightarrow a = b = c = d = 0$ ↯

Caso 2: $c = 1$ y F_1 es de grado 3

pero $\dim \mathbb{V}(F_1) = 2$ y $\dim V = 1$ ↯

Recuerda que aún $V \subset \mathbb{P}^3$ es la intersección de dos hipersuperficies su ideal homogéneo radical tiene un número minimal de 3 generadores

$$\mathbb{I}(V) = (y^2 - xz,\ z^2 - wy,\ xw - yz) \subset \mathbb{C}[x,y,z,w]$$