$\Rightarrow \quad \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es racional y por lo tanto holomorfa. //

Comentario: Variedades algebraicas abstractas

En el ejemplo de $\mathbb{P}^n$ podemos sustituir la topología Euclideana por la topología de Zariski. Pegando variedades algebraicas afines por aplicaciones racionales uno llega al concepto de una variedad algebraica abstracta (esencialmente un espacio topológico con una cobertura de abiertos que son variedades algebraicas afines pegados por morfismos).

§ Variedades Proyectivas

Recuerda: no existen funciones analíticas no constantes en la esfera de Riemann $\mathbb{P}^1$.

$\Rightarrow$ no existen funciones polinomiales no constantes en $\mathbb{P}^1$

$\Rightarrow$ no podemos "copiar" la definición de variedades afines tomando conjuntos de ceros en comunes de funciones polinomiales en $\mathbb{P}^n$.

Para evitar este problema consideramos funciones polinomiales homogéneas en $\mathbb{C}^{n+1}$:

$F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ es homogéneo si todos sus términos tienen el mismo grado (donde $\deg(x_i) := 1$)

Ejercicio: El conjunto de ceros de un polinomio homogeneo $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ es biendefinido en $\mathbb{P}^n$!

Si F es homogéneo de grado d entonces $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

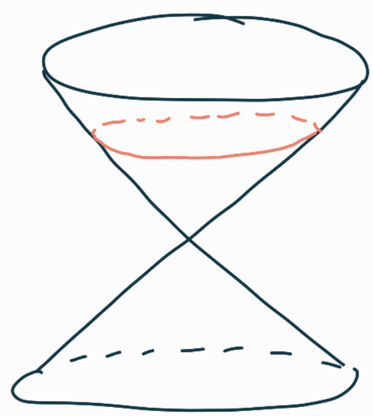
$$F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n)$$

$\Rightarrow$ Si $F(x_0, \dots, x_n) = 0$ y $(x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ entonces $F(p_0, \dots, p_n) = 0$ $\forall$ $(p_0, \dots, p_n)$ que pertenece a la linea que pasa por $(x_0, \dots, x_n)$ y $(0, \dots, 0)$. //

Definición: Una variedad algebraica proyectiva en $\mathbb{P}^n$ es el conjunto de ceros en comunes de una colección de polinomios homogéneos en $n+1$ variables:

$$V = \mathbb{V}(\{F_i\}_{i \in I}) \subset \mathbb{P}^n$$

Ejemplo $V = \mathbb{V}(x^2 + y^2 - z^2) \subset \mathbb{P}^2_{x,y,z}$ es la curva cónica



$V \cap U_z \cong \mathbb{V}(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$

Tenemos $V = \underbrace{(V \cap U_x)}_{\mathbb{V}(1 + y^2 - z^2)} \cup \underbrace{(V \cap U_y)}_{\mathbb{V}(x^2 + 1 - z^2)} \cup (V \cap U_z)$

En general, si $V \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad proyectiva tenemos $V = (V \cap U_0) \cup (V \cap U_1) \cup \dots \cup (V \cap U_n)$

y $(V \cap U_i) \subset U_i = \mathbb{A}^n$ es una variedad alg. afín.

o también una pieza afín de V

Otra alternativa de pensar variedades proyectivas en $\mathbb{P}^n$ es considerando sus conos afines

Si $V = \mathbb{V}(F_1, \dots, F_r) \subset \mathbb{P}^n$ con $F_1, \dots, F_r \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ podemos considerar la variedad alg. afín

$$\tilde{V} := \mathbb{V}(F_1, \dots, F_r) \subset \mathbb{A}^{n+1}$$

Como los F_i son homogéneos $\tilde{V}$ tiene la forma de un cono. Identificando los puntos en $\tilde{V}$ que pertenecen a una línea por el origen obtenemos V.

Definición: Sea $V \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva. El ideal de polinomios en $n+1$ variables que son cero en V es

$$\mathbb{I}(V) = \{ F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] : F(V) = \{0\} \}$$

Se llama el ideal homogéneo de la variedad proy. V.

Ejercicio: Verifica que $\mathbb{I}(V)$ es radical, finitamente generado, homogéneo

Nullstellensatz homogéneo

Las subvariedades proyectivas de $\mathbb{P}^n$ están en correspondencia 1-1 con ideales radicales homogéneos en $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$

(con la excepción del ideal maximal $(x_0, \dots, x_n)$ que define $\underset{\mathbb{P}^n \not\ni}{\{(0, \dots, 0)\}} \subset \mathbb{A}^{n+1}$)

Prueba: Considerando el cono afín. //

Definición: El anillo de coordenadas homogenas de una variedad proyectiva $V \subset \mathbb{P}^n$ es

$$\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n] / \mathbb{I}(V)$$

↳ coincide con el anillo de coordenadas del cono afín $\tilde{V}$

⚠ ¡los elementos no son funciones en V!

Topología de Zariski

Como en el caso afín observamos

- uniones finitas de variedades proyectivas en $\mathbb{P}^n$ son variedades proyectivas en $\mathbb{P}^n$
- intersecciones arbitrarias de variedades proyectivas en $\mathbb{P}^n$ son variedades proyectivas en $\mathbb{P}^n$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}^n$ cuenta con la topología de Zariski.

$\Rightarrow$ variedades proyectivas en $\mathbb{P}^n$ cuentan con la topología de Zariski obtenido como topología de subespacio.

↳ conjuntos cerrados son subvariedades proyectivas

TAREA ① Cada variedad proyectiva en $\mathbb{P}^n$ es compacta en la topología Euclideana y variedades proyectivas son compactificaciones de variedades afines en la topología de Zariski y Euclidea

2 a) Encuentre una biyección del conjunto de polinomios homogéneos en 2 variables de grado d y el conjunto de polinomios de grado d en una variable.

b) Muestra que la topología de subespacio en piezas afines $V \cap \mathbb{A}^2$ forman la topología de Zariski en $V \subseteq \mathbb{P}^2$ (que coincide con la top. de Zariski en $V \subset \mathbb{P}^2$)
Generaliza para n arbitrario, $V \subset \mathbb{P}^n$.

La cerradura proyectiva de una variedad afín

Recuerda que las piezas afines $U_i \subset \mathbb{P}^n$ son de forma $\mathbb{A}^n$.
De este modo tenemos $\mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$ como un conjunto abierto y denso
↳ $\mathbb{P}^n$ es una "compactificación" de $\mathbb{A}^n$

Definición: Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad algebraica afín y consideremos un encaje fijo $V \subseteq \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$.
La cerradura proyectiva $\overline{V}$ de V es la cerradura de Zariski (equivalentemente Euclideana) de V en $\mathbb{P}^n$.

Observaciones:

1. $\overline{V}$ es una compactificación de V
2. $\overline{V}$ depende del encaje.

Los puntos en $\mathbb{P}^n$ son líneas que contienen el origen.
Por lo tanto, geométricamente $\overline{V} \subset \mathbb{P}^n$ es el cono sobre $V \subset \mathbb{A}^n = U$ donde U es una pieza afín, e.g. $U = U_{n+1} = \{x_0 = 1\} \subset \mathbb{P}^n$.

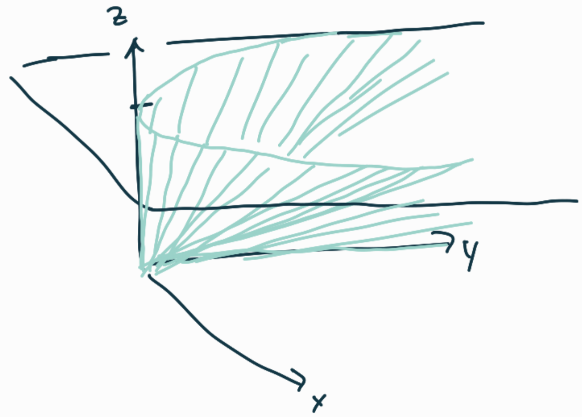
Ejercicio: Sea $V = \mathbb{V}(x-y^2) \subset \mathbb{A}^2$ y fijamos el encaje

$\mathbb{A}^2 = U_z \subset \mathbb{P}^2_{x:y:z}$

entonces $\mathbb{A}^2$ corresponde al plano $z=1$

¿Cuál es la ecuación que determina $\overline{V} \subset \mathbb{P}^2$?

$\overline{V} = \mathbb{V}(zx-y^2)$ que es U_z y el punto $[0:1:0]$ que corresponde al eje y



Homogenización

Algebraicamente pasando de una variedad afín a su cerradura proyectiva se refleja en el ideal de la variedad como sigue:

Definición: Sea $F \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio en n variables, su homogenización $\tilde{F} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ es un polinomio en $n+1$ variables obtenido de la siguiente manera

1. descomponemos F en sus componentes homogeneas

$$F = G_d + G_{d-1} + \dots + G_1 + G_0$$

donde $G_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ es homogeneo de grado i y $\deg(F) = d$

2. definimos $\tilde{F} := G_d + x_0 G_{d-1} + \dots + x_0^{d-1} G_1 + x_0^d G_0$