§ Morfismos de variedades proyectivas

Definición Sean $V \subset \mathbb{P}^n$ y $W \subset \mathbb{P}^m$ variedades proyectivas y sea $F: V \longrightarrow W$ una aplicación. Entonces, F es un **morfismo de variedades proyectivas** si cumple:

$\forall p \in V \ \exists F_0, \dots, F_m \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ homogeneos t.q. para algún $U \subset V$ abierto, $p \in V$:

zariski

$$U \xrightarrow{F|_U} W$$

coincide con la aplicación polinomial

$$U \longrightarrow \mathbb{P}^m$$
$$q \longmapsto [F_0(q) : \dots : F_m(q)]$$

para que sea biendefinida los F_i tienen el mismo grado y no se anulan simultaneamente

Ejercicio:

Consideramos la aplicación

$$F: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$
$$[s:t] \longmapsto [s^2 : st : t^2]$$

1. Verifica que es biendefinida
2. La imagen es una curva C en $\mathbb{P}^2$, ¿cual es su ideal?
3. Sean $U_s \cong \mathbb{A}^1 \cong U_t$ las partes afines de $\mathbb{P}^1$. Muestra que $F: \mathbb{P}^1 \longrightarrow C$ es un morfismo de variedades proyectivas describiendo las aplicaciones polinomiales:

$$F|_{U_s}: \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2 \quad y \quad F|_{U_t}: \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

Solución $C = \mathbb{V}(xz - y^2)$, $F|_{U_s}: \mathbb{A}^1 \longrightarrow \left(\mathbb{A}^2 \cong U_z \right)$, $u \longmapsto (u^2, u) \mapsto [u^2 : u : 1]$

$F|_{U_t}: \mathbb{A}^1 \longrightarrow \left(\mathbb{A}^2 \cong U_x \right)$, $v \longmapsto (v, v^2) \mapsto [1 : v : v^2]$

La naturaleza local de la definición de morfismo asegura que las restricciones a las cartas afines son morfismos de variedades afines.

En el ejercicio vemos que morfismos de variedades proy. también pueden admitir una descripción en coordenadas homogéneas, pero el siguiente ejemplo muestra que eso no siempre es posible:

Ejemplo: Consideramos $C = \mathbb{V}(xz - y^2) \subset \mathbb{P}^2$ la curva cónica plana del ejercicio anterior. Definimos

$$F : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$$
$$[x:y:z] \longmapsto \begin{cases} [x:y] & \text{si } x \neq 0 \\ [y:z] & \text{si } z \neq 0 \end{cases}$$

P.D. F es un morfismo de variedades proyectivas que no admite descripción global

① F es bien definido: si fuera posible que $x = z = 0$ también $y = 0$ (por la ecuación $xz = y^2$)

$\Rightarrow \forall\, p \in C$ tenemos $p \in U_x \cap C$ o $p \in U_z \cap C$

Si $p \in U_x \cap U_z \cap C$ calculamos

$$[x:y] = [xy : y^2] = [xy : xz] = [y:z] \quad //$$

$y^2 = xz \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$

② Ninguna de las dos descripciones locales funciona globalmente, e.g. si $z = 0$ $[x:y] \neq [y:z]$

Definición: Un morfismo de variedades proyectivas $F : V \to W$ es un isomorfismo si existe un morfismo de variedades proyectivas $G : W \to V$ que es inverso a F.

Ejemplo Como en el caso afín tenemos que un cambio de coordenadas en $\mathbb{P}^n$ es un isomorfismo. Explícito, sean $F_0, \dots, F_n$ polinomios homogeneos de grado uno en $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ que son linealmente independiente. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ [x_0 : \dots : x_n] &\longmapsto [F_0(X) : \dots : F_n(X)] \end{aligned}$$

es un isomorfismo. Su inversa se obtiene de la inversa de la matriz de coeficientes de los F_i.

Ejercicio: Verifica que
$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{V}(xz - y^2) \\ [s:t] &\longmapsto [s^2 : st : t^2] \end{aligned}$$
es un isomorfismo.

Recuerda: si V, W son variedades afines observamos que V y W son isomorfas si y solo si sus anillos de coordenadas $\mathbb{C}[V]$ y $\mathbb{C}[W]$ lo son (como $\mathbb{C}$-álgebras)

⚠ Esta observación NO se generaliza a variedades proyectivas y sus anillos de coordenadas homogeneos.

Ejemplo Verificamos que $C = \mathbb{V}(xz - y^2) \subset \mathbb{P}^2$ es isomorfa a $\mathbb{P}^1$ con isomorfismo dado por

$$\begin{aligned} F : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow C \subset \mathbb{P}^2 \\ [s:t] &\longmapsto [s^2 : st : t^2] \end{aligned}$$

El pullback induce una aplicación entre los anillos de coordenadas homogeneas:

$$F^{\#} : \mathbb{C}[x,y,z]/(xz - y^2) \longrightarrow \mathbb{C}[s,t]$$

$$x \longmapsto s^2, \quad y \longmapsto st, \quad z \longmapsto t^2$$