§ Aplicaciones racionales

Recuerda: X variedad casi proyectiva

una función racional en X es (U,f) con

- $U \subset X$ abierto
- $f \in \mathcal{O}_X(U)$ función regular

Vimos que una aplicación $\phi: X \to Y$ es un morfismo (o aplicación regular) si

$\forall\, p \in X\ \exists\ \underset{p}{\underset{\Psi}{U}} \subset X,\ \underset{\phi(p)}{\underset{\Psi}{U'}} \subset Y$ abiertos t.q.

$\phi|_U$ es definido por un conjunto de funciones en $\mathcal{O}_X(U)$

De manera similar definimos aplicaciones racionales:

Definición: Sea X, Y variedades casi proyectivas y $U, U' \subset X$ abiertos. Dos morfismos (de variedades casi proy.)

$\varphi: U \to Y$ y $\varphi': U' \to Y$

son **equivalentes** si $\varphi|_{U \cap U'} = \varphi'|_{U \cap U'}$.

Una **aplicación racional** $X \dashrightarrow Y$ es una clase de equivalencia de morfismos $U \to Y$, $U \subset X$ abierto.

Observaciones

* Recuerda que funciones racionales de X solo son definidos en un conjunto abierto $U \subset X$. Lo mismo se cumple para aplicaciones racionales
  - ↳ no son aplicaciones en el sentido de conjuntos
* Recuerda la relación de equivalencia de funciones racionales $(U,f) \sim (U',g)$ si $f|_{U \cap U'} = g|_{U \cap U'}$
  - ↳ aplicaciones racionales son determinadas por funciones racionales en coordenadas locales

Es decir $X \overset{\varphi}{-\,-\!\!\to} Y$ es aplicación racional, si $\exists\, U \subset X$ abierto t.q. $\varphi|_U : U \to Y$ es determinado por un conjunto de funciones en $\mathcal{O}_X(U)$.

↳ aplicaciones racionales son morfismos definidos "casi en todas partes" i.e. en un conjunto abierto denso

☆ Cuidado con composición de aplicaciones racionales

$$X \overset{\varphi_1}{-\,-\!\!\to} Y \overset{\varphi_2}{-\,-\!\!\to} Z$$

solo es biendefinido si la imagen de φ_1 es denso en Y

Ejercicio: Sea $H \subset \mathbb{P}^n$ un hiperplano y $p \in \mathbb{P}^n$ t.q. $p \notin H$. Verifica que la proyección de p a H es una aplicación racional

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n &\overset{\varphi}{-\,-\!\!\to} H = \mathbb{P}^{n-1} \\ x &\longmapsto \overline{xp} \cap H \end{aligned}$$

En coordenadas homogéneas, sea $p = [0 : \dots : 0 : 1]$ y $H = \mathbb{V}(x_n) \subset \mathbb{P}^n$.

Entonces,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^n &-\,-\!\!\to \mathbb{P}^{n-1} \cong H := \mathbb{V}(x_n) \subset \mathbb{P}^n \\ [x_0 : \dots : x_n] &\longmapsto [x_0 : \dots : x_{n-1}] \end{aligned}$$

es biendefinido en $\mathbb{P}^n \setminus \{p\}$.

Equivalencia biracional

Definición: Sean X y Y variedades irreducibles. Son **biracionalmente equivalente** si existen aplicaciones racionales mutuamente inversos

$$F : X -\,-\!\!\to Y \quad y \quad G : Y -\,-\!\!\to X$$

Es decir, $F \circ G$ y $G \circ F$ son biendefinidos y la identidad en su dominio de definición (conjuntos abiertos densos en X y Y respectivamente)

Ejemplo: ① Cada isomorfismo de variedades casi proyectivas es una equivalencia biracional (con dominio de definición toda la variedad).

② Cada variedad casi proyectiva es biracionalmente equivalente a cada una de sus cerraduras proyectivas (en diferentes espacios proyectivos ambiente).

③ Cada variedad casi proyectiva es biracionalmente equivalente a cada uno de sus blow ups. en un punto

Ejercicio: Verifica ③ para $V \subset \mathbb{A}^n$

Sea $V \subset \mathbb{A}^n$ y $p \in V$. Entonces $B_p(V) \subset B_p(\mathbb{A}^n)$ es la cerradura de la preimagen de $V \setminus \{p\}$ bajo la proyección $\pi : B_p(\mathbb{A}^n) \to \mathbb{A}^n$

→ $V \setminus \{p\}$ es biracionalmente equivalente a V

→ $\pi^{-1}(V \setminus \{p\})$ es biracionalmente equivalente a su cerradura en $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$.

Definición: La gráfica de una aplicación racional $X \overset{F}{\dashrightarrow} Y$ es la cerradura* en $X \times Y$ de la gráfica en el sentido de conjuntos de cualquiera de sus representantes $U \xrightarrow{\varphi} Y$.

Es decir,

$$\Gamma_F = \overline{\{(x, \varphi(x)) : x \in U\}} \subset X \times Y$$

recuerda Segre! variedad casi proyectiva

*en la topología de Zariski de $X \times Y$

TAREA: Verifica que la gráfica de una aplicación racional es biendefinida, ie. no depende del representante. Además, muestra que la proyección $\Gamma_F \to X$ es una equivalencia biracional.

§ Blow up de un ideal/una subvariedad

Consideramos la aplicación

$$\mathbb{A}^n \setminus \{0\} \xrightarrow{\ell} \mathbb{P}^{n-1}$$
$$x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \ell(x) = [x_1 : \dots : x_n]$$

La gráfica (como conjunto) es

$$\{ (x, \ell(x)) \in \mathbb{A}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{P}^{n-1} \}$$

El blow-up $B_p(\mathbb{A}^n)$ es su clausura en $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$, es decir $B_p(\mathbb{A}^n)$ es la gráfica de la aplicación racional

$$\mathbb{A}^n \overset{\ell}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^{n-1}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto [x_1 : \dots : x_n]$$

Definición: Sean $F_1, \dots, F_r \in \mathbb{C}[X]$ con X una variedad afín y $I = (F_1, \dots, F_r) \subset \mathbb{C}[X]$ el ideal que generan. Supongamos $0 \neq I \neq \mathbb{C}[X]$. → I determina una subvariedad $Y \subset X$.

El blow-up $B_I(X)$ de X a lo largo de I es la gráfica de la aplicación racional

$$X \overset{F}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^{r-1}$$
$$x \longmapsto [F_1(x) : \dots : F_r(x)]$$

junto con la proyección $B \subset X \times \mathbb{P}^{r-1} \xrightarrow{\pi} X$

Afirmación: $B_I(X) \xrightarrow{\pi} X$ es un isomorfismo fuera de $Y = \mathbb{V}(I) \subset X$.
$$(x, F(x)) \longmapsto x$$

demo: Consideramos $B_I(X) \setminus \pi^{-1}(Y) \longrightarrow X \setminus Y$. Un morfismo inverso es dado por

$$X \setminus Y \longrightarrow B_I(X) \subset X \times \mathbb{P}^{n-1}$$
$$x \longmapsto (x, [F_1(x) : \dots : F_r(x)])$$