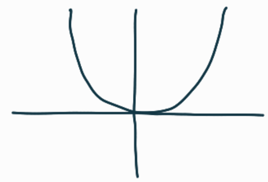
Curso Geometría Algebraica

¿Qué es Geometría Algebraica?

El estudio de espacios que son conjuntos de ceros de polinomios, e.g.



$y - x^2 = 0$

Nos permite estudiar objetos geometricos con métodos algebraicos

Plan para el curso:

§1 Variedades afines

§2 Variedades proyectivas

§3 Ejemplos y Construcciones

§4 Propiedades locales

Objetivo del curso: preparación para el examen general.

Evaluación del curso:

- tareas (bi) semanales
- presentaciones octubre 31 2023 (después de Congreso SMM)
- examen parcial septiembre 12 2023
- examen final noviembre 24 2023

§1 Variedades afines

Literatura: K. Smith et al, Invitation to Algebraic Geometry
Springer, 2000

Definición: Una **variedad algebraica afín** es el conjunto de ceros comunes de una colección $\{F_i\}_{i\in I}$ de polinomios en n variables en el espacio $\mathbb{C}^n$.

Escribimos, $V = \mathbb{V}(\{F_i\}_{i\in I}) \subset \mathbb{C}^n$

otra notación común:
$Z(\{F_i\})$ "zero"
$V(\{F_i\})$

donde I es un conjunto arbitrario (no necesariamente finito ni contable)

Por ejemplo, $\mathbb{V}(x_1, x_2) \subset \mathbb{C}^3$ es la línea en $\mathbb{C}^3$
$\{(0,0,x_3) : x_3 \in \mathbb{C}\}$

Comentarios:

1. El campo $\mathbb{C}$ se puede reemplazar por otro $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_p, \ldots$ pero $\mathbb{C}$ hace algunas cosas más fácil y por ello nos enfocamos en $\mathbb{C}$.
2. Más adelante vamos a refinar la definición para evitar que V depende de su encaje en $\mathbb{C}^n$.

Ejemplos:

0. Tenemos
$$\mathbb{C}^n = \mathbb{V}(0)$$
$$\emptyset = \mathbb{V}(1)$$
$$\{(a_1,\ldots,a_n)\} = \mathbb{V}(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$$

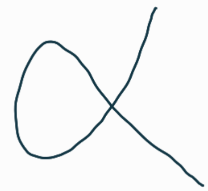
La variedad $\mathbb{C}$ se llama la **línea compleja**
$\mathbb{C}^2$ se llama el **plano complejo**
$\mathbb{C}^n$ se llama el **n-espacio complejo** o el **n-espacio afín**

Si V es una variedad afín en $\mathbb{C}^n$ en dibujos visualizamos los puntos reales de $\mathbb{V}$: $\mathbb{V} \cap \mathbb{R}^n$

② una curva plana afín es el conjunto de ceros de un solo polinomio en $\mathbb{C}^2$, e.g.

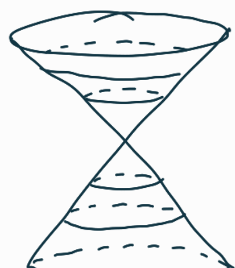
$\mathbb{V}(y-x^2) \subset \mathbb{C}^2$

$\mathbb{V}(x^2y + xy^2 - x^4 - y^4) \subset \mathbb{C}^2$



$\mathbb{V}(y^2 - x^2 - x^3) \subset \mathbb{C}^2$

③ Un conjunto de ceros de un solo polinomio en $\mathbb{C}^n$ se llama una hipersuperficie, e.g



El cono quadratico
$\mathbb{V}(x^2+y^2-z^2) \subset \mathbb{C}^3$

④ El conjunto de ceros de un polinomio lineal (ie de grado 1) se llama un hiperplano, e.g.
$\mathbb{V}(ax + by - c)$ para cuales quiera $a, b, c \in \mathbb{C}$ es un hiperplano en $\mathbb{C}^2$

El conjunto de ceros de una coleción de polinomios lineales $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n - b$ en $\mathbb{C}^n$ se llama una variedad afín lineal. Si la colección tiene k polinomios linealmente independiente, la dimensión de la variedad es $n-k$.

Ejercicio

⑤ El conjunto de matrices $n \times n$ se puede identificar con $\mathbb{C}^{n^2}$. En $\mathbb{C}^{n^2}$ tenemos el grupo de matrices con determinante 1 $SL_n(\mathbb{C})$ como variedad algebraica afín:

Sea $\Delta := \det \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \cdots & x_{n1} \end{bmatrix}$ el determinante, entonces

$SL_n(\mathbb{C}) = \mathbb{V}(\Delta - 1) \subset \mathbb{C}^{n^2}$

(6) Una variedad determinantal es un conjunto en $\mathbb{C}^{n^2}$ de todas las matrices de rango menor igual a $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$k \geq n$: todo $\mathbb{C}^{n^2}$

$k < n$: $\mathbb{V}($ menores $(k+1) \times (k+1))$

↳ determinante de una submatriz de $\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$

Noejemplos:

(1) Una bola abierta en la topología Euclideana en $\mathbb{C}^n$ no es una variedad algebraica

$\boxed{\text{Tarea: Cada variedad algebraica afín en } \mathbb{C}^n \text{ es un conjunto cerrado en la topología Euclideana.}}$

⇝ $GL_n(\mathbb{C})$ no es una variedad algebraica afín en $\mathbb{C}^{n^2}$ pero con la definición generalizada más adelante vamos a ver que sí es una variedad algebraica afín.

El conjunto de matrices unitarias $U(n)$

columnas son ortonormales, i.e. $\langle z, w \rangle = z \cdot \overline{w}^t = \sum z_i \overline{w_i} = 0$

no es una variedad algebraica afín (en ninguna definición)

(2) El cuadrado cerrado $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ es un conjunto cerrado que no es una variedad algebraica. Es una consecuencia del hecho que ninguna variedad alg. en $\mathbb{C}^2$ tiene puntos interiores pues el conjunto de ceros de cualquier polinomio no cero no tiene puntos interiores.

(3) Graficas de funciones transcendentales no son variedades algebraicas, e.g. $y - e^x$.

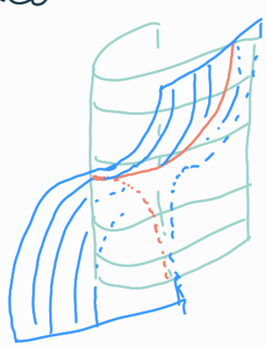
Definición:
una subvariedad de una variedad alg. afín $V \subset \mathbb{C}^n$ es una variedad alg. afín $W \subset \mathbb{C}^n$ que está contenida en V.

Tarea: Muestra que
1. $U(n) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ tampoco es una subvariedad algebraica afín
2. $U(n) \subset \mathbb{R}^{2n^2}$ es el conjunto de ceros de una colección de polinomios con coeficientes reales.

La intersección de cualquier número de variedades alg. afines en $\mathbb{C}^n$ es una variedad alg. afín — el conjunto de ceros de la unión de los polinomios:

$$\mathbb{V}(\{F_i\}_{i\in I}) \cap \mathbb{V}(\{F_j\}_{j\in J}) = \mathbb{V}(\{F_i\}_{i\in I\cup J})$$

Ejemplo: La curva cubica torcida es la intersección de dos superficies:



$$\mathbb{V}(x^2-y,\ x^3-z) = \mathbb{V}(x^2-y) \cap \mathbb{V}(x^3-z)$$

La unión de dos variedades alg. afines en $\mathbb{C}^n$ es una variedad alg. afín definida por los productos por pares de los polinomios:

si F_1, F_2 son polinomios y $p \in \mathbb{C}^n$ satisface

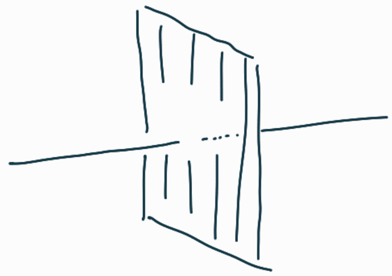
$$(F_1 F_2)(p) = 0 \Rightarrow F_1(p) = 0 \quad \text{o} \quad F_2(p) = 0$$

Por ejemplo, $\{(0,b) \in \mathbb{C}^2\} \cup \{(a,0) \in \mathbb{C}^2\} = \mathbb{V}(xy)$

Por lo tanto tenemos

$$\mathbb{V}(\{F_i\}_{i\in I}) \cup \mathbb{V}(\{F_j\}_{j\in J}) = \mathbb{V}(\{F_iF_j\}_{i\in I, j\in J})$$

Ejemplo: La unión del plano yz y del eje x en $\mathbb{C}^3$



$$\mathbb{V}(y,z) \cup \mathbb{V}(x) = \mathbb{V}(xy, xz)$$

§ La topología de Zariski:

Vimos que $\emptyset$, $\mathbb{C}^n$, intersecciones de cualquier número de variedades alg. afines y uniones (de dos, por lo tanto) de cualquier número finito de variedades alg. afines son variedades alg. afines en $\mathbb{C}^n$

$\Rightarrow$ El conjunto $\mathcal{Z}$ de complementos de variedades alg. afines satisface las axiomas de una topología en $\mathbb{C}^n$:

$\mathbb{C}^n$, $\emptyset$, uniones de cualquier número y intersecciones de un número finito de conjuntos en $\mathcal{Z}$ son en $\mathcal{Z}$.

Esta topología se llama la topología de Zariski.

Notación:

Para enfatizar la diferencia del espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ y el espacio topológico con la topología de Zariski $\mathbb{C}^n$ escribimos $\mathbb{A}^n$: el espacio afín. La mayor diferencia es que mientras $\mathbb{C}^n$ tiene el origen como un punto especial en $\mathbb{A}^n$ no existe este punto distinguido. Aun así, fijando coordenadas vamos a llamar el punto $(0,\dots,0)$ el origen de $\mathbb{A}^n$.