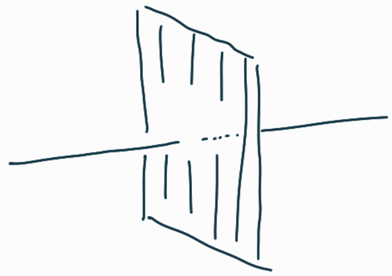
Por lo tanto tenemos

$$\mathbb{V}(\{F_i\}_{i\in I}) \cup \mathbb{V}(\{F_j\}_{j\in J}) = \mathbb{V}(\{F_iF_j\}_{i\in I, j\in J})$$

Ejemplo: La unión del plano yz y del eje x en $\mathbb{C}^3$



$$\mathbb{V}(y,z) \cup \mathbb{V}(x) = \mathbb{V}(xy, xz)$$

§ La topología de Zariski:

Vimos que $\emptyset$, $\mathbb{C}^n$, intersecciones de cualquier número de variedades alg. afines y uniones (de dos, por lo tanto) de cualquier número finito de variedades alg. afines son variedades alg. afines en $\mathbb{C}^n$

$\Rightarrow$ El conjunto $\mathcal{Z}$ de complementos de variedades alg. afines satisface los axiomas de una topología en $\mathbb{C}^n$:

$\mathbb{C}^n$, $\emptyset$, uniones de cualquier número y intersecciones de un número finito de conjuntos en $\mathcal{Z}$ son en $\mathcal{Z}$.

Esta topología se llama la topología de Zariski.

Notación:

Para enfatizar la diferencia del espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ y el espacio topológico con la topología de Zariski $\mathbb{C}^n$ escribimos $\mathbb{A}^n$: el espacio afín. La mayor diferencia es que mientras $\mathbb{C}^n$ tiene el origen como un punto especial en $\mathbb{A}^n$ no existe este punto distinguido. Aun así, fijando coordenadas vamos a llamar el punto $(0,\dots,0)$ el origen de $\mathbb{A}^n$.

	topología de Zariski		topología Euclideana
variedad algebraica afín	cerrada	$\Rightarrow$	cerrada
	conjuntos abiertos son densos (¡muy grandes)	$\Rightarrow$	conjuntos abiertos de Zariski no son acotadas
	$\Rightarrow$ la intersección de dos abiertos nunca es vacía		X
	$\Rightarrow$ no es Hausdorff		si es Hausdorff
	for any two distinct points, there exist neighbourhoods of each which are disjoint from each other.		
	existen conjuntos compactos no cerrados		X
	biendefinida sobre cualquier campo		X

$V \subset \mathbb{A}^n$ variedad alg. afín obtiene la topología de Zariski de $\mathbb{A}^n$ (topología de subespacio)

$\Rightarrow$ subvariedades de V son conjuntos cerrados en V

Ejemplo: Sea $V = \mathbb{V}(y-x^2) \subset \mathbb{A}^2$ entonces todos los conjuntos cerrados propios en V son finitos. De hecho la topología de Zariski en cada curva plana es la topología cofinita siempre y cuando la curva no es la unión de dos curvas.

$\hookrightarrow$ un subconjunto cofinito en V es un conjunto cuyo complemento es finito. En la topología cofinita en V los abiertos son V, $\emptyset$ y los subconjuntos cofinitos.

Por lo general, en la geometría algebraica usamos la topología de Zariski (si no se menciona de otra)

Tarea ① La unión de dos variedades alg. afines en $\mathbb{A}^n$ es una variedad alg. afín.

② La topología de Zariski en $\mathbb{A}^2$ no es la topología producto en $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ (Tipp: la diagonal)

③ La curva cúbica torcida en $\mathbb{A}^3$ coincide con el conjunto de puntos (t, t^2, t^3), $t \in \mathbb{C}$

§ Morfismos (aplicaciones regulares)

Morfismos de variedades algebraicas son definidos por polinomios, por ejemplo

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n &\xrightarrow{F} \mathbb{A}^m \\ x &\longmapsto (F_1(x), F_2(x), \dots, F_m(x)) \end{aligned}$$

es una aplicación polinomial (o regular), es decir las componentes $F_1, \dots, F_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

Definición Sean $V \subset \mathbb{A}^n$, $W \in \mathbb{A}^m$ variedades alg. afines. Una aplicación $F: V \to W$ es un morfismo de variedades algebraicas (o regular) si es la restricción de una aplicación polinomial $\tilde{F}: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$.

F es un isomorfismo si existe un morfismo inverso (también regular). En este caso V y W son isomorfas

Ejemplo: Un cambio de coordenadas de $\mathbb{A}^n$ es un ejemplo de un isomorfismo de $\mathbb{A}^n$ con si mismo, o sea un automorfismo; explícitamente sea

$$L_i(x) = \lambda_{i1} x_1 + \dots + \lambda_{in} x_n + \mu_i$$

un polinomio de grado uno en $x_1, \dots, x_n$ con $\lambda_{ij}, \mu_i \in \mathbb{C}$

Entonces,
$$L : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$$
$$x \longmapsto (L_1(x), \dots, L_n(x))$$

es un morfismo de variedades algebraicas. L es un isomorfismo si y solo si la matriz $(\lambda_{ij})_{i,j \in [n]}$ es invertible.

Ejercicio: Verifica o refuta:

1. La proyección $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$ $(x,y) \mapsto x$
   a) es un morfismo
   b) es un isomorfismo

2. Sea $V = \mathbb{V}(y - x^2) \subset \mathbb{A}^2$ la parabola
   a) $\mathbb{A}^1 \longrightarrow C$, $t \mapsto (t, t^2)$ es un isomorfismo
   b) En caso de que (a) sea cierta, ¿cuál es el morfismo inverso?

En los ejercicios podemos ver que morfismos no necesariamente mandan subvariedades a subvariedades:

$$\mathbb{A}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^1$$
$$(x,y) \longmapsto x$$

manda el cerrado $\mathbb{V}(xy-1) = \{(t, t^{-1}) : t \neq 0\} \subset \mathbb{A}^2$ al abierto $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{A}^1$.