

Ejercicio:

Sea $V_i = V \cap U_i \subset U_i \cong \mathbb{A}^n$. Entonces

$$\mathbb{C}[V_i] \cong \mathbb{C}[V]_{(x_i)}$$

anillo de coord.
de la var. afín $V_i \subset \mathbb{A}^n$

anillo de coord. homog.
de la var. proy. V
localizado en x_i

Solución:

Observa que

$$\psi_i: \mathbb{C}[x_0, \hat{x}_i, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_{(x_i)}$$

quita x_i

$$\mapsto f\left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

es un isomorfismo de anillos con inversa
dada por la evaluación $x_i = 1$.

Si $f \in \mathbb{C}[x_0, \hat{x}_i, \dots, x_n]$ observamos que $\exists n > 0$:

$$\psi_i(f) = x_i^n \tilde{f}$$

donde $\tilde{f}$ es la homogenización de f con resp. a x_i .

Recordemos que el ideal $\mathbb{I}(V)$ se obtiene del
ideal $\mathbb{I}(V_i)$ homogenizando con respecto a x_i .

Concluimos

$$\psi_i(\mathbb{I}(V_i)) = \mathbb{I}(V) \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_{(x_i)} =: \mathbb{I}(V)_{(x_i)}$$

En particular, ψ_i induce un isomorfismo

$$\mathbb{C}[V_i] = \frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]}{\mathbb{I}(V_i)} \xrightarrow[\sim]{\psi_i} \frac{\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_{(x_i)}}{\mathbb{I}(V)_{(x_i)}} = \mathbb{C}[V]_{(x_i)}$$