

④ P.D. $i \neq j \quad \varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}$

$x \in U_i \cap U_j: \varphi_i(x) = [x_0 x_i^{d-1}, \dots, x_n x_i^{d-1}] \xrightarrow{d} [x_0 : \dots : x_n] \xrightarrow{\text{②}} [x_0 x_j^{d-1}, \dots, x_n x_j^{d-1}] = \varphi_j(x)$

□

Corolario: Sea $v_d: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m$ la d -ésima aplicación de Veronese y sean $\{z_I: I \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}, |I|=d\}$ las coordenadas ^{homog.} de $\mathbb{P}^m$, $m = \binom{n+d}{d} - 1$.

La variedad proyectiva $v_d(\mathbb{P}^n) =: W \subset \mathbb{P}^m$ es definida por las ecuaciones

$$Y := \{z_I z_J - z_K z_L: I, J, K, L \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}, I+J=K+L\}$$

Prueba: P.D. $V(Y) = v_d(\mathbb{P}^n)$

$v_d(\mathbb{P}^n) \subset V(Y)$ en $v_d(\mathbb{P}^n): z_I = x^I$
 Sean $I, J, K, L \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}$
 t.q. $I+J=K+L$ $x^I \cdot x^J = x^{I+J} = x^{K+L} = x^K \cdot x^L$

$V := V(Y) \subset v_d(\mathbb{P}^n)$ Consideramos la aplicación inversa:

① **Afirmación:** $\forall p \in V \exists l \in [0, n] \text{ t.q. } p(0, \dots, l, \dots, 0) \neq 0$

Supongamos que no es así.

$\nearrow$
 d -ésima

$\exists$ alguna coord. homog. $p(l_0, \dots, l_n) \neq 0$

Sin perder de generalidad fijamos $(l_0, \dots, l_n)$ t.q. el índice más grande entre todas tuplas I

Con $P_I \neq 0$ aparece en $(l_0, \dots, l_n)$, sea $l_{\max}$ este índice. Observe $0 \leq l_{\max} \leq d-1$

$$\Rightarrow \exists \tilde{l} \text{ en } l_0, \dots, l_n : 1 \leq \tilde{l} \leq d-1 \text{ y}$$

$$P(l_0, \dots, l_n) \stackrel{2}{=} P(l_0, \dots, l_{\max+1}, \dots, \tilde{l}-1, \dots, l_n) P(l_0, \dots, l_{\max-1}, \dots, \tilde{l}+1, \dots, l_n)$$

$\downarrow$
 $P \in V$

$$\Rightarrow P(l_0, \dots, l_{\max+1}, \dots, \tilde{l}-1, \dots, l_n) \neq 0$$

entonces $l_{\max}$ no fue el índice más grande.

$$\Rightarrow \exists l \in [0, n] \text{ t.q. } P(0, \dots, l, \dots, 0) \neq 0$$

$$\Rightarrow \{V_i := \{z_{(0, \dots, \overset{i\text{-ésima}}{l}, \dots, 0)} \neq 0\} \cap V : i \in [0, n]\} \text{ es}$$

una cobertura de V

$\Rightarrow$ las aplicaciones locales

$$\psi_i: V_i \rightarrow \mathbb{P}^n$$

$$z \mapsto [z_{(1, 0, \dots, d-1, \dots, 0)} : z_{(0, 1, \dots, d-1, \dots, 0)} : \dots : z_{(0, \dots, d-1, \dots, 0)}]$$

determinan un morfismo $\psi: V \rightarrow \mathbb{P}^n$ que es la inversa de ν_d .

$$\Rightarrow V \cong \nu_d(\mathbb{P}^n).$$

