HANDOUT: TENSORPRODUKTE VON MODULN DER GRUPPENALGEBRA

Seminar "Darstellungstheorie der Symmetrischen Gruppe - der Okounkov–Vershik Ansatz", WS 16/17, http://www.mi.uni-koeln.de/∼lbossing/seminar1617.html

Dies ist eine kurze Zusammenfassung zum Thema *Tensorprodukte von kG-Moduln* der für die folgende Vorträge notwendige Vorraussetzungen enthält. Detaillierte Hintergründe zu Tensorprodukten und Dualen ist in § B.1 und § B.3 von [FH91] zu finden. Im folgenden sei G eine endliche Gruppe, k ein Körper mit Charakteristik null und kG die Gruppenalgebra. Weiterhin sind alle kG-Moduln endlich erzeugte k-Vectorräume. Seien U und V kG-Moduln und bezeichne mit "$\cdot$" die Operation von kG auf U und V. Wir bezeichnen mit $\operatorname{Hom}(U,V) = \operatorname{Hom}_k(U,V)$ den Vekttorraum der linearen Abbildungen von U nach V, also

$$\operatorname{Hom}(U,V) = \{\phi : U \to V \mid \phi(u+u') = \phi(u)+\phi(u'), \phi(cu) = c\phi(u)\ \forall u, u' \in U, c \in k\}$$

Definition 1. Der Vektorraum der *kG-Modulhomomorphismen* ist definiert als

$$\operatorname*{Hom}_{kG}(U,V) := \{\phi \in \operatorname*{Hom}_{k}(U,V) \mid \phi(a \cdot u) \quad = \quad a \cdot \phi(u)\ \forall u \in U, a \in kG\}.$$

Es gilt ausserdem, dass $\operatorname{Hom}_{kG}(U,V)$ ein kG-Modul ist: die Addition ist gegeben durch $(\phi+\psi)(u) = \phi(u) + \psi(u)$ für $u \in U$ und $\phi, \psi \in \operatorname{Hom}_{kG}(U,V)$ und die kG-Operation ist definiert als $(a \cdot \phi)(u) = a \cdot (\phi(u)) = \phi(a \cdot u), a \in kG$.

Definition 2. Sei $U \times V$ das kartesische Produkt der Vektorräume U und V. Das *Tensorprodukt* $U \otimes_k V$ ist ein kG-Modul definiert durch die Abbildung

$$\eta : U \times V \to U \otimes_k V$$

mit folgenden Eigenschaften

- $\eta(u+u', v) = \eta(u,v) + \eta(u',v)$ für $u, u' \in U$ und $v \in V$,
- $\eta(u, v+v') = \eta(u,v) + \eta(u,v')$ für $u \in U$ und $v, v' \in V$,
- $\eta(uc, v) = \eta(u, cv)$ für $u \in U, v \in V$ und $c \in k$,
- $\eta(a \cdot u, v) = a \cdot \eta(u,v)$ für $u \in U, v \in V$ und $a \in kG$.

Die ersten drei Eigenschaften beinhalten, dass η bilinear ist. Des weiteren muss gelten, dass für alle kG-Moduln M und Abbildungen $f : U \times V \to M$ die ebenfalls obige Eigenschaften erfüllen, ein $\alpha : U \otimes_k V \to M$ existiert, so dass folgenden diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\forall f"'] & & U \otimes_k V \arrow[dl, dashed, "\exists! \alpha"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Wir schreiben $u \otimes v = \eta(u,v), u \in U, v \in V$. Sei $\{u_i \mid 1 \leq i \leq r\}$ eine Basis von U und $\{v_j \mid 1 \leq j \leq s\}$ eine Basis von V, also gilt $\dim_k U = r$ und $\dim_k V = s$. Dann hat das Tensorprodukt $U \otimes_k V$ eine Basis $\{u_i \otimes v_j \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$.

Falls $u = \sum_i c_i u_i \in U$ und $v = \sum_j d_j v_j \in V$, dann ist $u \otimes v = \sum_{i,j} c_i d_j (u_i \otimes v_j)$. Insbesondere ist $\dim_k U \otimes_k V = rs$ und beliebige Elemente in $U \otimes_k V$ sind endliche Summen der Symbole $u_i \otimes v_j$.

Definition 3. Betrachte zu U den dualen Vektorraum $U^* = \mathrm{Hom}_k(U, k)$. Mit der kG-Operation definiert für $g \in G, u \in U, \phi \in U^*$ durch $(g \cdot \phi)(u) = \phi(g^{-1} \cdot u)$ und linear fortgesetzt wird U^* zu einem kG-Modul.

Beispiel 1. Sei $G = S_3$ die symmetrische Gruppe, $k = \mathbb{C}$ und $U = \mathbb{C}^3$ die Standarddarstellung. Es gilt für $\sigma \in S_3$ und e_i standardbasisvektor von $\mathbb{C}^3$, dass $\sigma \cdot e_i = e_{\sigma^{-1}(i)}$. Betrachte $(\mathbb{C}^3)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C})$. Zur Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{C}^3$ haben betrachten wir die duale Basis $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ von $(\mathbb{C}^3)^*$ mit $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$. Per Definition operiert $\sigma \in S_3$ wie folgt auf e_i^*

$$(\sigma \cdot e_i^*)(e_j) = e_i^*(\sigma^{-1} \cdot e_j) = e_i^*(e_{\sigma(j)}) = \delta_{i,\sigma(j)} = \delta_{\sigma^{-1}(i),j} = e^*_{\sigma^{-1}(i)}(e_j).$$

Somit gilt $\sigma \cdot e_i^* = e^*_{\sigma^{-1}(i)}$. Es folgt, $\mathbb{C}^3$ und $(\mathbb{C}^3)^*$ sind isomorphe $\mathbb{C}S_3$-Moduln, wobei der Isomorphismus gegeben ist durch $f : \mathbb{C}^3 \to (\mathbb{C}^3)^*$ mit $f(e_i) = e_i^*$.

Betrachte die Abbildung $\Gamma : U^* \otimes V \to \mathrm{Hom}_k(U, V)$ definiert durch $\Gamma(\phi \otimes v)(u) = \phi(u)v$ für $u \in U, v \in V$ und $\phi \in U^*$ und linear fortgesetzt. Das folgende Lemma wird sich als nützlich erweisen.

Lemma 1. Die Abbildung Γ definiert einen Isomorphismus von kG-Moduln zwischen $U^* \otimes_k V$ und $\mathrm{Hom}_k(U, V)$.

Proof. Es muss geziegt werden, dass Γ einen Isomorphismus von k-Vektorrumen definiert, dies ist Hausaufgabe[1]. Weiterhin ist zu zeigen, dass Γ ein Isomorphismus von kG-Moduln ist. Es muss also gelten $\Gamma(a \cdot (\phi \otimes v))(u) = (a \cdot \Gamma(\phi \otimes v))(u)$ für $a \in kG, u \in U, v \in V$ und $\phi \in U^*$. Da Γ ein Isomorphismus von k-Vektorräumen ist, reicht es dies für $a \in G$ zu zeigen. Sei also $g \in G$, dann gilt einerseits

$$\Gamma(g \cdot (\phi \otimes v))(u) = \Gamma(g \cdot \phi \otimes v)(u) = (g \cdot \phi)(u)v = \phi(g^{-1} \cdot u)v.$$

Andererseits gilt auch

$$(g \cdot \Gamma(\phi \otimes v))(u) = g \cdot \Gamma(\phi \otimes v)(u) = g \cdot (\phi(u)v) = \phi(g^{-1} \cdot u)v.$$

$\square$

References

[AB95] , Alperin, J. L. and Bell, Rowen B, Groups and representations, Graduate Texts in Mathematics, 162, Springer-Verlag, New York, 1995, ISBN 0-387-94525-3

[FH91] Fulton, William and Harris, Joe, Representation theory, Graduate Texts in Mathematics, 129, A first course, Readings in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991, ISBN 0-387-97527-6; 0-387-97495-4

[1] Falls alle Bemühungen dies zu beweisen vergeblich bleiben, siehe Proposition 12.4 in [AB95]