

Caminos con ciclos cerrados

El objetivo de esta sección es mostrar $\text{Med}(\text{Radun}) \subset \text{Grun}^{\text{en}}$, una extensión del **lema de Lindström** a redes planas (no necesariamente acíclicas).

Sean $I, J \in \binom{[n]}{k}$, definimos $K = I \setminus J$ y $L = J \setminus I$. Nota que $|K| = |L|$.

Supongamos que I es el conjunto de fuentes de la red N , y escogemos una colección de caminos de $\{b_i : i \in I\}$ a $\{b_j : j \in J\}$.

Si $j \in I \cap J$ fijamos el "camino fijo" que se queda en b_j .

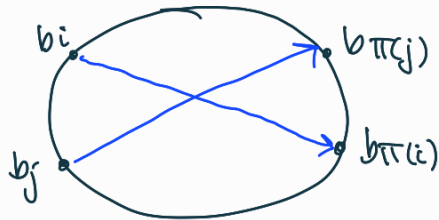
Entonces, los caminos no triviales en la colección son caminos de $\{b_u : u \in K\}$ a $\{b_v : v \in L\}$.

Consideremos una biyección $\pi : K \rightarrow L$ tal que los caminos no triviales son de forma

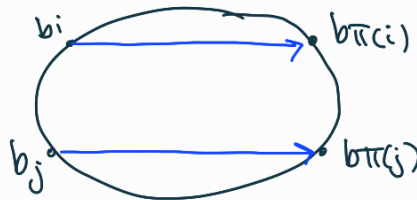
$$b_i \rightarrow b_{\pi(i)} \quad \forall i \in K.$$

Definición. Un par (i, j) con $i < j$, $i, j \in K$ es

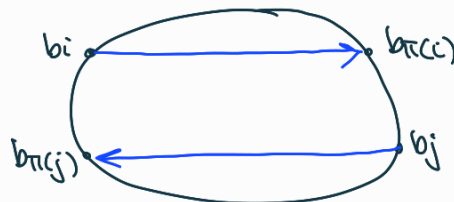
un **cruce de π** si



una **alineación** si



una **misalinea** si



El **número de cruces de π** se anota $\text{cruce}(\pi)$.

Lema 5.1 Sean $I, J \in \binom{[n]}{k}$, $K = I \setminus J$ y $L = J \setminus I$ con $|K| = |L| = r$. Entonces,

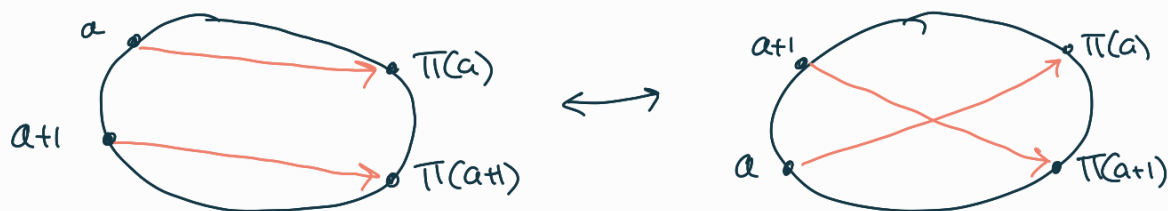
$$\Delta_J \Delta_I^{r-1} = \sum_{\substack{\pi: K \rightarrow L \\ \text{biyección}}} (-1)^{\text{cruce}(\pi)} \prod_{i \in K} \Delta_{I \cup \{i\} \cup \pi(i)}$$

es una relación de las coordenadas de Plücker en Grun .

Ejercicio. Si $r=2$ es equivalente a una relación de Plücker.

Prueba del Lema 5.1:

Verificaremos la ecuación en una matriz $A \in \text{Mat}_n^*(\mathbb{R})$.
 Primero chequeemos que la ecuación es invariante bajo la permutación de columnas de A . Si cambiamos las columnas a y $a+1$ un menos $\Delta_n(A)$ cambia por un signo si $a, a+1 \in K$. De lo contrario se queda igual. Ajustamos los conjuntos I y J según el cambio de las columnas a y $a+1$. El número de cruces $\text{cruce}(\pi)$ cambia por ± 1 si $a, a+1 \in K$ y $\pi^\pm(a) \neq a+1$:



(y similar si $(a, a+1)$ es una desalineación).

Note: si $\pi^\pm(a) = a+1$ el cambio solo intercambia alineaciones y desalineaciones que involucren a o $a+1$, pero no introduce ni resuelve cruces.

Hay que distinguir varios casos considerando cual de los conjuntos $K, L, I \cap J, [n] \setminus (I \cup J)$

contiene los elementos a y $a+1$. En cada caso hay que mostrar que ambos lados de la ecuación cambian (o no) el signo.

Caso 1 $a, a+1 \in K \Rightarrow \Delta_I$ cambia el signo, Δ_J sigue igual entonces a mano izquierda obtenemos $(-1)^{r-1}$

(a) Dado π con $\pi^\pm(a) \neq a+1$ tenemos un cambio de signo $(-1)^{\text{cruce}(\pi)} \rightarrow (-1)^{\text{cruce}(\pi) \pm 1}$

Además para cada $i \in K \setminus \{a, a+1\}$ el menor $\Delta_{I \cup \{i\} \cup \pi(i)}$ cambia el signo. $\Rightarrow$ obtenemos $(-1)^{r-2}$

En total cambia el signo a mano derecha por $(-1)^{r-1}$.

(b) Dado π con $\pi^\pm(a) = a+1$, $\text{cruce}(\pi)$ no cambia, pero

$\Delta_{I \cup \{i\} \cup \pi(i)} = 0$ para $i = a$ o $i = a+1$. Por lo tanto, este caso no contribuye a la relación.

Los demás casos son similares. $\rightarrow$ Tarea.

Dado que la relación es invariante bajo permutaciones de las columnas de A podemos suponer en toda de generalidad que $I = [k]$ y $J = [k-r] \cup [k+1, k+r]$.

Supongamos además que $\Delta_I(A) \neq 0$ (eso representa a un conjunto abierto, denso en $\text{Gr}(n)$). En este caso, multiplicando por A_I^{-1} podemos suponer que $A_I = \mathbb{1}_k$, entonces $\Delta_I(A) = 1$ y

$$\Delta_J(A) = \det \begin{bmatrix} e_1 & \dots & e_{k-r} & a_{1,k+r} & \dots & a_{1,k+r} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ e_k & & & a_{k,k+r} & \dots & a_{k,k+r} \end{bmatrix} = \det (a_{i+k-r, j+k})_{i,j \in [r]}$$

Además tenemos

$$\Delta_{I \setminus \{i+k-r\} \cup \{j+k\}} = \det \begin{bmatrix} e_1 & \dots & e_{i+k-r} & \dots & e_k & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & a_{i,j+k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_k & & & a_{k,j+k} & \dots & a_{k,k+r} \end{bmatrix} = (-1)^{r-i} a_{i+k-r, j+k}$$

$$\prod_{j=1}^{r-i} (-1)^{(i+k-r+j) + (i+k-r+j-1)} = \prod_{j \in [r-i]} (-1) = (-1)^{r-i}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{\pi: [r] \rightarrow [k+1, k+r]} (-1)^{\text{inv}(\pi)} \prod_{i \in [r]} \Delta_{I \cup \{\pi(i)\}} = \sum_{\pi} (-1)^{\binom{r}{2} - \ell(\pi)} \prod_{i \in [r]} (-1)^{r-i} a_{i+k-r, j+k}$$

$$= \det (a_{i+k-r, j+k})_{i,j \in [r]} \quad \square$$

Obtenemos la siguiente descripción intrínseca para los menores maximales de la matriz de medida de frontera $A(N)$:

Proposición 5.2 Sea N una red plana con n vértices frontera, de los cuales k son fuentes $v_i, i \in I$ y con medidas de frontera $M_{ij}, i \in I, j \in E$. Entonces para cada $J \in \binom{[n]}{k}$ tenemos

$$\Delta_J(A(N)) = \sum_{\substack{\pi: k \rightarrow L \\ \text{bij.}}} (-1)^{\text{inv}(\pi)} \prod_{i \in k} M_{i, \pi(i)}$$

donde $k = I \cap J$ y $L = J \setminus I$.

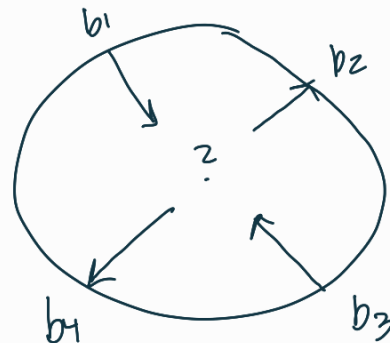
Prueba: Recuerda que en términos de las coordenadas de Plücker de $\text{Med}(N) \in \text{Gr}(n)$ tenemos

$$M_{i, \pi(i)} = \Delta_{I \setminus \{i\} \cup \{\pi(i)\}} / \Delta_I$$

Como $\Delta_I(A(N)) = 1$ por definición de $A(N)$, la afirmación es una consecuencia del lema 5.1 $\square$

Tarea: Verifica los detalles de la prueba.

Ejemplo: Consideramos una red con 4 vértices frontera y conjunto de fuentes $\{1, 3\}$. Tenemos



$$A(N) = \begin{pmatrix} 1 & M_{12} & 0 & -M_{14} \\ 0 & M_{32} & 1 & M_{34} \end{pmatrix}$$

donde M_{ij} depende del interior de la red $(?)$.

Calculamos

$$\Delta_{24}(A(N)) = M_{12}M_{34} + M_{32}M_{14}$$

$\downarrow$
 $b_1 \rightarrow b_2$
 $b_3 \rightarrow b_4$
 $\text{once} = 0$

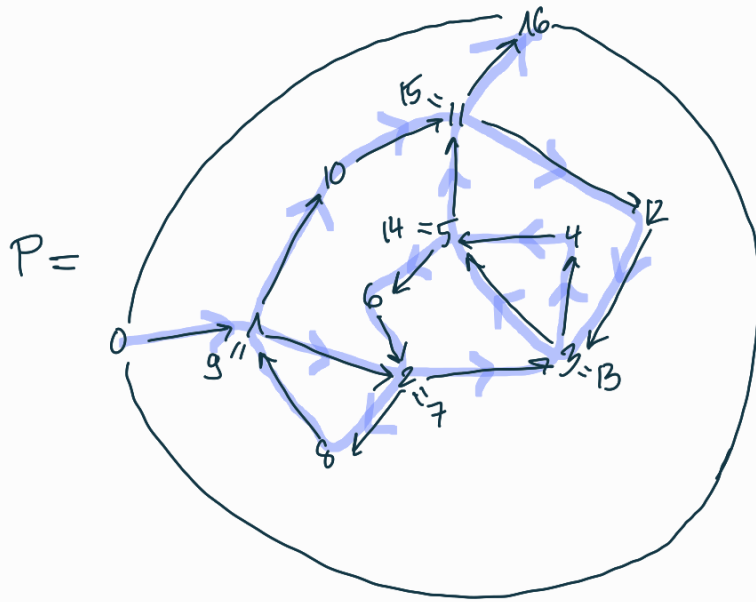
$\downarrow$
 $b_3 \rightarrow b_2$
 $b_1 \rightarrow b_4$
 $\text{once} = 0$

Definición: Sea P un camino en una red plana con vértices $v_1, v_2, \dots, v_{l-1}, v_l$ (con v_1, v_l en la frontera). Si P no tiene autointersecciones $\text{vueltas}(P) = 0$.

Si P tiene al menos un punto de autointersección, buscamos un ciclo en P que es un segmento C con vértices $v_i, i \in [a, b]$ tal que $v_a, v_{a+1}, \dots, v_b$ son vértices distintos y $v_a = v_b$. Sea $P' := P \setminus C$ el camino con vértices $v_1, v_2, \dots, v_{a-1}, v_a, v_{b+1}, \dots, v_l$. P' es el camino con ciclo C borrado. Tenemos

$$\text{vueltas}(P) = \begin{cases} \text{vueltas}(P') + 1, & \text{Si } C \text{ es un ciclo en sentido antihorario} \\ \text{vueltas}(P') - 1, & \text{Si } C \text{ es un ciclo en sentido horario} \end{cases}$$

Ejercicio: Calcula el número de vueltas del ejemplo abajo. Verifica que es bien definido (que no depende del orden ni de los ciclos que se borran).



Definición: Sea N una red plana no necesariamente acíclica con pesos de aristas x_e , vértices de frontera v_i (fuentes si $i \in I$, pozos si $i \in \bar{I}$). Para $i \in I, j \in \bar{I}$ la medida de frontera formal es

$$M_{ij}^{\text{form}} := \sum_{P: v_i \rightarrow v_j} (-1)^{\text{vueltes}(P)} \prod_{e \in P} x_e.$$

La matriz de medida de frontera formal $A(N)^{\text{form}}$ se define de manera análoga a la matriz $A(N)$ en el caso acíclico, con la medidas formales:

$$M_{ij}^{\text{form}} = \frac{\Delta_{I \setminus i, \bar{I} \setminus j}(A(N)^{\text{form}})}{\Delta_I(A(N)^{\text{form}})}$$

En este caso las entradas de $A(N)^{\text{form}}$ son series formales de potencia en los $\{x_e: e \in G\}$.

Objetivo: Los menores maximales de $A(N)^{\text{form}}$ son expresiones racionales libre de subtracciones en los pesos $\{x_e: e \in G\}$.

Recordar que I es el conjunto de fuentes, J un conjunto con $|J|=|I|$, $K=I \setminus J$ y $L=J \setminus I$ con $|K|=|L|$, N una red.

Definición: Sea $K=\{k_1, \dots, k_r\}$. Una colección de caminos $\mathcal{P}=(P_1, \dots, P_r)$ en N es admisibles si cumple

① Ningún P_i tiene autointersecciones.

② $\exists$ biyección $\pi: K \rightarrow L$ tal que $\tilde{P}_i: b_{k_i} \rightarrow b_{k_{\pi(i)}} \quad i \in [r]$

③ $\text{unac}(\pi) = 0$

④ Si (k_i, k_j) es una alineación de π , entonces

P_i y P_j no tienen vértices en común.

Nota que solo hay un número finito de colecciones admisibles.

Ejercicio: ¿cuáles son las colecciones admisibles del ejemplo anterior?

Sea $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_r)$ una colección admisible y sea

$$P_i = (v_{i1}, \dots, v_{im_i})$$

Definimos $\text{Cic}_{ij}(\mathcal{P})$ como el conjunto de todos los ciclos (sin autointersección) que

- empiezan y terminan en v_{ij}
- no contienen ninguno de los vértices $v_{i1}, \dots, v_{ij-1}$
- no contienen ninguno de los vértices de un camino $P_{i'}$ con $i' < i$ y $(k_{i'}, k_i)$ una alineación de π .

Nota que $\text{Cic}_{ij}(\mathcal{P})$ es un conjunto finito.

Proposición^{5.3}: Sea N una red plana con conjunto de fuentes $I \subset [n]$, $|I| = k$ y $J \subset [n]$, $|J| = k$.

Sean K y L como antes y sea $A = A(N)^{\text{form}}$.
Entonces

$$\Delta_J(A) = \sum_{\substack{\mathcal{P} \text{ colección} \\ \text{admisible} \\ \text{de caminos}}} x_{\mathcal{P}} \prod_{\substack{i \in [r] \\ j \in [m_i]}} \left(1 + \sum_{C \in \text{Cic}_{ij}} x_C \right)^{-1}$$

donde $x_{\mathcal{P}} = \prod_{e \in \mathcal{P}} x_e$, $r = \# \text{ caminos en } \mathcal{P}$, $m_i = \# \text{ vértices en } P_i$,

$$x_C = \prod_{e \in C} x_e.$$

si es una desalineación se pueden intersectar.

si es una desalineación no hay restricción

Nota que un corolario inmediato de la Prop. 5.3 es:

$$\text{Corolario 5.4} \quad \text{Med}(\text{Rad}_n) \subseteq \text{Gr}_n^{\text{tnn}}$$