Caminos con ciclos borrados

El objetivo de esta sección es mostrar $\mathrm{Med}(\mathrm{Red}_{kn}) \subset \mathrm{Gr}_{kn}^{tnn}$, una extensión del lema de Lindström a redes planas (no necesariamente acíclicas)

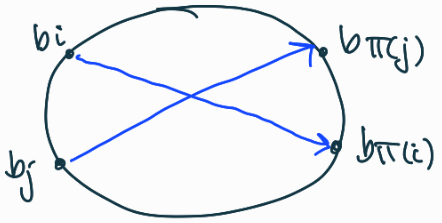
Sean $I, J \in \binom{[n]}{k}$, definimos $K = I \setminus J$ y $L = J \setminus I$. Nota que $|K| = |L|$.
Supongamos que I es el conjunto de fuentes de la red N, y escogemos una colección de caminos de $\{b_i : i \in I\}$ a $\{b_j : j \in J\}$.
Si $j \in I \cap J$ fijamos el "camino flojo" que se queda en b_j.
Entonces, los caminos no triviales en la colección son caminos de $\{b_k : k \in K\}$ a $\{b_\ell : \ell \in L\}$.

Consideramos una biyección $\pi : K \to L$ tal que los caminos no triviales son de forma

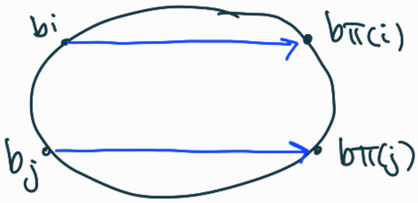
$$b_i \longrightarrow b_{\pi(i)} \quad \forall\, i \in K.$$

Definición. Un par (i,j) con $i < j$, $i, j \in K$ es

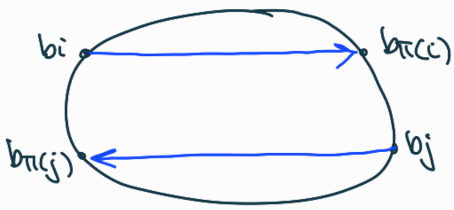
un cruze de π si



una alineación si



una misalineación si



El número de cruzes de π se anota $\mathrm{cruce}(\pi)$.

Lema 5.1 Sean $I, J \in \binom{[n]}{k}$, $K = I \setminus J$ y $L = J \setminus I$ con $|K| = |L| = r$. Entonces,

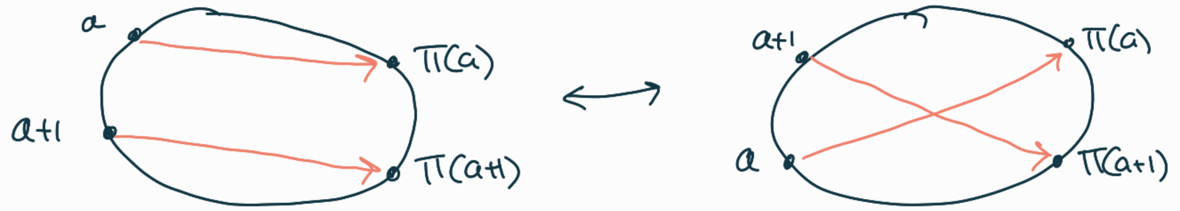
$$\Delta_J \cdot \Delta_I^{r-1} = \sum_{\substack{\pi : K \to L \\ \text{biyección}}} (-1)^{\mathrm{cruce}(\pi)} \prod_{i \in K} \Delta_{I \setminus \{i\} \cup \{\pi(i)\}}$$

es una relación de las coordenadas de Plücker en Gr_{kn}.

Ejercicio: Si $r = 2$ es equivalente a una relación de Plücker.

Prueba del Lema 5.1:

Verificamos la ecuación en una matriz $A \in \mathrm{Mat}^*_{k\times n}(\mathbb{R})$.
Primero chequeamos que la ecuación es invariante bajo la permutación de columnas de A. Si cambiamos las columnas a y $a+1$ un menor $\Delta_M(A)$ cambia por un signo si $a, a+1 \in M$. De lo contrario se queda igual. Ajustamos los conjuntos I y J según el cambio de las columnas a y $a+1$. El número de cruces $\mathrm{cruce}(\pi)$ cambia por ± 1 si $a, a+1 \in K \cup L$ y $\pi^{\pm}(a) \neq a+1$:



(y similar si $(a, a+1)$ es una desalineación).

Nota: si $\pi^{\pm}(a) = a+1$ el cambio solo intercambia alineaciones y desalineaciones que involucran a o $a+1$, pero no introduce ni resuelve cruces.

Hay que distinguir varios casos considerando cual de los conjuntos
$$K, L, I\cap J, [n]\setminus(I\cup J)$$
contiene los elementos a y $a+1$. En cada caso hay que mostrar que ambos lados de la ecuación cambian (o no) el signo.

Caso 1 $a, a+1 \in K \Rightarrow \Delta_I$ cambia de signo, Δ_J sigue igual entonces a mano izquierda obtenemos $(-1)^{r-1}$

(a) Dado π con $\pi^{\pm}(a) \neq a+1$ tenemos un cambio de signo
$$(-1)^{\mathrm{cruce}(\pi)} \longrightarrow (-1)^{\mathrm{cruce}(\pi)\pm 1}$$
Además para cada $i \in K \setminus \{a, a+1\}$ el menor $\Delta_{I\setminus\{i\}\cup\{\pi(i)\}}$ cambia el signo. $\Rightarrow$ obtenemos $(-1)^{r-2}$
En total cambia el signo a mano derecha por $(-1)^{r-1}$!

(b) Dado π con $\pi^{\pm}(a) = a+1$, $\mathrm{cruce}(\pi)$ no cambia, pero $\Delta_{I\setminus\{i\}\cup\{\pi(i)\}} = 0$ para $i=a$ o $i=a+1$. Por lo tanto, este caso no contribuye a la relación.

Los demás casos son similares. $\rightarrow$ **Tarea**

Dado que la relación es invariante bajo permutaciones de las columnas de A podemos suponer sin pérdida de generalidad que $I=[k]$ y $J=[k-r]\cup[k+1,k+r]$.

Supongamos además que $\Delta_I(A)\neq 0$ (eso representa a un conjunto abierto, denso en Gr_{kn}). En este caso, multiplicando por A_I^{-1} podemos suponer que $A_I=\mathbb{1}_k$, entonces $\Delta_I(A)=1$ y

$$\Delta_J(A)=\det\begin{bmatrix} | & & | & a_{1k+1} & \cdots & a_{1k+r} \\ e_1 & \cdots & e_{k-r} & \vdots & & \vdots \\ | & & | & a_{kk+1} & \cdots & a_{kk+r}\end{bmatrix}=\det\left((a_{i+k-r,j+k})_{i,j\in[r]}\right)$$

Además tenemos

$$\Delta_{I\setminus\{i+k-r\}\cup\{j+k\}}=\det\begin{bmatrix} | & & & & | & a_{1j+k} \\ e_1 & \cdots & \hat{e}_{i+k-r} & \cdots & e_k & \vdots \\ | & & & & | & a_{kj+k}\end{bmatrix}=(-1)^{r-i}a_{i+k-r,j+k}$$

$$\prod_{j=1}^{r-i}(-1)^{(i+k-r+j)+(i+k-r+j-1)}=\prod_{j\in[r-i]}(-1)=(-1)^{r-i}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{\pi:[r]\to[k+1,k+r]}(-1)^{\mathrm{cross}(\pi)}\prod_{i\in[r]}\Delta_{I\setminus i\cup\pi(i)}=\sum_{\pi}(-1)^{\binom{r}{2}-\ell(\pi)}\prod_{i\in[r]}(-1)^{r-i}a_{i+k-r,j+k}$$

$$=\det\left((a_{i+k-r,j+k})_{i,j\in[r]}\right)\quad\square$$

Obtenemos la siguiente descripción intrínseca para los menores maximales de la matriz de medida de frontera $A(N)$:

Proposición 5.2 Sea N una red plana con n vértices frontera, de los cuales k son fuentes $b_i, i\in I$ y con medidas de frontera M_{ij}, $i\in I$, $j\in \bar{I}$. Entonces para cada $J\in\binom{[n]}{k}$ tenemos

$$\Delta_J(A(N))=\sum_{\substack{\pi:K\to L\\ \text{biy.}}}(-1)^{\mathrm{cross}(\pi)}\prod_{i\in K}M_{i\pi(i)}$$

donde $K=I\setminus J$ y $L=J\setminus I$.

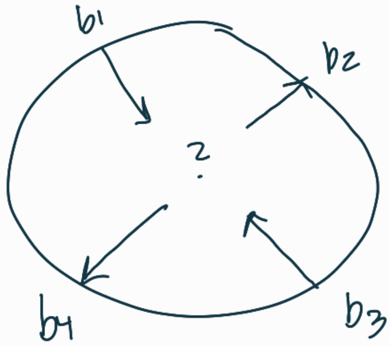
Prueba: Recuerda que en términos de las coordenadas de Plücker de $\mathrm{Med}(N)\in Gr_{kn}$ tenemos

$$M_{i,\pi(i)}=\Delta_{I\setminus\{i\}\cup\{\pi(i)\}}/\Delta_I$$

Como $\Delta_I(A(N))=1$ por definición de $A(N)$, la afirmación es una consecuencia del Lema 5.1 $\square$

Tarea: Verifica los detalles de la prueba.

Ejemplo: Consideramos una red con 4 vértices frontera y conjunto de fuentes $\{1,3\}$. Tenemos



$$A(N) = \begin{pmatrix} 1 & M_{12} & 0 & -M_{14} \\ 0 & M_{32} & 1 & M_{34} \end{pmatrix}$$

donde M_{ij} depende del interior de la red (?).

Calculamos

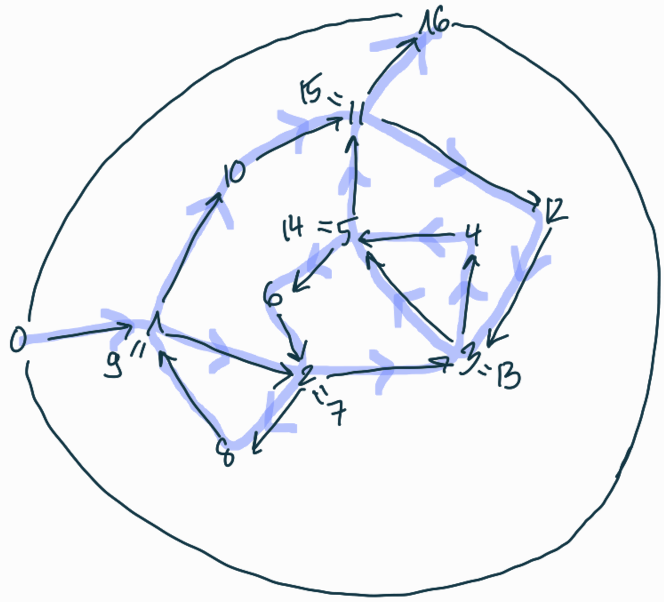
$$\Delta_{24}(A(N)) = \underset{\substack{b_1 \to b_2 \\ b_3 \to b_4 \\ \text{cruce} = 0}}{M_{12}M_{34}} + \underset{\substack{b_3 \to b_2 \\ b_1 \to b_4 \\ \text{cruce} = 0}}{M_{32}M_{14}}$$

Definición: Sea P un camino en una red plana con vértices $v_1, v_2, \dots, v_{l-1}, v_l$ (con v_1, v_l en la frontera). Si P no tiene autointersecciones vueltas$(P)=0$.

Si P tiene al menos un punto de autointersección, borramos un ciclo en P que es un segmento C con vértices v_i, $i \in [a,b]$ tal que $v_a, v_{a+1}, \dots, v_{b-1}$ son vértices distintos y $v_a = v_b$. Sea $P' := P \setminus C$ el camino con vértices $v_1, v_2, \dots, v_{a-1}, v_a, v_{b+1}, \dots, v_l$.
P' es el camino con ciclo C borrado. Tenemos

$$\text{vueltas}(P) = \begin{cases} \text{vueltas}(\tilde{P}) + 1, & \text{si } C \text{ es un ciclo en sentido antihorario} \\ \text{vueltas}(\tilde{P}) - 1, & \text{si } C \text{ es un ciclo en sentido horario} \end{cases}$$

Ejercicio: Calcula el número de vueltas del ejemplo abajo. Verifica que es bien definido (que no depende del orden ni de los ciclos que se borran).

$P =$ 

Definición: Sea N una red plana no necesariamente acíclica con pesos de aristas x_e, vértices de frontera b_i (fuentes si $i \in I$, pozos si $i \in \bar{I}$). Para $i \in I$, $j \in \bar{I}$ la medida de frontera formal es

$$M_{ij}^{form} := \sum_{P: b_i \to b_j} (-1)^{\text{vueltas}(P)} \prod_{e \in P} x_e .$$

La matriz de medida de frontera formal $A(N)^{form}$ se define de manera análoga a la matriz $A(N)$ en el caso acíclico con las medidas formales:

$$M_{ij}^{form} = \frac{\Delta_{I \setminus i \cup j}(A(N)^{form})}{\Delta_I(A(N)^{form})}$$

En este caso las entradas de $A(N)^{form}$ son series formales de potencia en los $\{x_e : e \in G\}$.

Objetivo: Los menores maximales de $A(N)^{form}$ son expresiones racionales libre de substracciones en los pesos $\{x_e : e \in G\}$.

Recuerda que I es el conjunto de fuentes, J un conjunto con $|J| = |I|$, $K = I \setminus J$ y $L = J \setminus I$ con $|K| = |L|$, N una red.

Definición: Sea $K = \{k_1 < \dots < k_r\}$. Una colección de caminos $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_r)$ en N es **admisible** si cumple

1. Ningún P_i tiene autointersecciones.

② $\exists$ biyección $\pi: K \to L$ tal que $\mathcal{P}_i : b_{k_i} \to b_{k_{\pi(i)}}$ $\quad i \in [r]$

③ $\mathrm{cruce}(\pi) = 0$

④ Si (k_i, k_j) es una alineación de π, entonces P_i y P_j no tienen vértices en común.

si es una desalineación se pueden intersectar.

Nota que solo hay un número finito de colecciones admisibles.

Ejercicio: ¿Cuáles son las colecciones admisibles del ejemplo anterior?

Sea $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_r)$ una colección admisible y sea

$$P_i = (v_{i1}, \dots, v_{im_i})$$

Definimos $Cic_{ij}(P)$ como el conjunto de todos los ciclos (sin autointersección) que

- empiezan y terminan en v_{ij}
- no contienen ninguno de los vértices $v_{i1}, \dots, v_{ij-1}$
- no contienen ninguno de los vértices de un camino $P_{i'}$ con $i' < i$ y $(k_{i'}, k_i)$ una alineación de π.

si es una desalineación no hay restricción

Nota que $Cic_{ij}(P)$ es un conjunto finito.

Proposición 5.3: Sea N una red plana con conjunto de fuentes $I \subset [n]$, $|I| = k$ y $J \subset [n]$, $|J| = k$. Sean K y L como antes y sea $A = A(N)^{\text{form}}$.
Entonces

$$\Delta_J(A) = \sum_{\substack{\mathcal{P} \text{ colección} \\ \text{admisible} \\ \text{de caminos}}} x_{\mathcal{P}} \prod_{\substack{i \in [r] \\ j \in [m_i]}} \Big(1 + \sum_{C \in Cic_{ij}} x_C\Big)^{-1}$$

donde $x_{\mathcal{P}} = \prod_{e \in \mathcal{P}} x_e$, $r = \#\text{caminos en } \mathcal{P}$, $m_i = \#\text{vértices en } P_i$,

$$x_C = \prod_{e \in C} x_e.$$

Nota que un corolario inmediato de la Prop. 5.3 es:

Corolario 5.4 $\mathrm{Med}(\mathrm{Red}_{un}) \subseteq \mathrm{Gr}_{kn}^{tnn}$

Prueba de la Proposición 5.3:

Sea $P = (v_1, \dots, v_m)$ un camino dirigido en G. Si P tiene más que un vértice de autointersección buscamos el primero v_i t.q. $v_i = v_j$ para algún $j<i$. Sea $P' = (v_1, \dots, v_j, v_{i+1}, \dots, v_m)$ el camino obtenido borrando el primer ciclo. Si P' todavía tiene vértices de autointersección repetimos el procedimiento. Finalmente obtenemos un camino $\tilde{P}$ sin autointersección. $\tilde{P}$ se llama el camino con ciclos borrados.

Sea $\tilde{P} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s)$ sin autointersección. Entonces todos los caminos P con parte de ciclos borrados $\tilde{P}$ se obtienen de $\tilde{P}$ desde el siguiente procedimiento:

Sea $Cic_j(\tilde{P})$ el conjunto de todos los ciclos que empiezen y terminen en $\tilde{v}_j$ que no contienen ninguno de los vértices $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{j-1}$. Un camino P se obtiene de $\tilde{P}$ agregando algunos ciclos de $Cic_1(\tilde{P})$, luego de $Cic_2(\tilde{P})$ etc.

Recuerda la Definición de la medida formal de frontera y la Proposición 5.2, tenemos

$$\Delta_J(A) = \sum_{\substack{\pi: K \to L \\ \text{biyección}}} (-1)^{\text{cruces}(\pi)} \sum_{\substack{(P_1, \dots, P_r) \\ P_i: b_{K_i} \to b_{\pi(K_i)}}} \prod_{i=1}^{r} (-1)^{\text{vueltas}(P_i)} x_{P_i}$$

donde $x_{P_i} = \prod_{e \in P_i} x_e$.

Sean $(\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_r)$ los caminos con ciclos borrados de $(P_1, \dots, P_r) = J$. Supongamos que existe un par de índices $i<j$ t.q. $\tilde{P}_i$ y $\tilde{P}_j$ comparten un vértice y además que (k_i, k_j) sea un cruce o

una alineación del π correspondiente. Además supongamos que (i,j) sea el par lexicográficamente minimal con esta propiedad. Sea $v \in \tilde{P}_i \cap P_j$ el primer punto de intersección.
Definimos otra colección de caminos

$$\mathcal{P}' = (P_1, \dots, P_{i-1}, P_i', P_{i+1}, \dots, P_{j-1}, P_j', P_{j+1}, \dots, P_s)$$

donde P_i' y P_j' se obtienen de P_i y P_j intercambiando los caminos a partir de vértice de intersección v. Corresponde a la biyección $\pi': K \to L$ que se obtiene de π cambiando $\pi(i)$ y $\pi(j)$.

Afirmación: $(-1)^{\text{cruce}(\pi)} = -(-1)^{\text{cruce}(\pi')}$

demo: Nota que reemplazamos un cruce de π (k_i, k_j) a una alineación, o al revés. Además podría ser que agregamos/eliminamos varios pares de cruces que no cambia el signo. //

Además nota que el procedimiento es una involución. En particular, para cada tal par (i,j) en $\mathcal{P}$ existe una única colección de caminos $\mathcal{P}'$ y la contribución de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ se cancelan en $\Delta_J(A)$.

Analizamos los términos que quedan. Nota que corresponden a colecciones de caminos $(P_1, \dots, P_r)$ para biyecciones π con $\text{cruce}(\pi) = 0$. Además si $(i<j)$ es una alineación de π tenemos que $\tilde{P}_i$ y P_j no comparten ningún vértice.
En particular, $\mathcal{P} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_r)$ es una colección admisible y todos los ciclos borrados pertenecen al conjunto $\mathrm{Cic}_{ij}(\mathcal{P})$.

Finalmente notamos que vueltas (P_i) es el número de ciclos que borramos de P_i. Por lo tanto, dado una familia admisible $\mathcal{P} = (\tilde{P}_1, \dots, \hat{P}_r)$ la contribución de todas las colecciones $(P_1, \dots, P_r)$ cuya versión de ciclos borrados es $\mathcal{P}$ es la siguiente:

$$x_{\mathcal{P}} \prod_{i,j} \left(1 - \sum_{c \in Cic_{ij}(\mathcal{P})} x_c + \sum_{c_1, c_2 \in Cic_{ij}(\mathcal{P})} x_{c_1} x_{c_2} - \cdots \right)$$

↳ el signo es alternante porque cada vez agregamos un ciclo, es decir una vuelta

$$= x_{\mathcal{P}} \prod_{i,j} \left(1 + \sum_{c \in Cic_{ij}(\mathcal{P})} x_c \right)^{-1} \qquad \square$$