Teorema: El ideal de Plücker tiene un conjunto de generadores de grado dos en biyección con los pares incomparables de $\mathcal{P}$.

Prueba del Teorema:

Sean $\sigma = \{\sigma_1 < \cdots < \sigma_s\}$ y $\tau = \{\tau_1 < \cdots < \tau_t\}$ con $s \geq t$ y $\sigma, \tau \in \mathcal{P}$ incomparable. Sea $i \in \{1, \dots, t\}$ el índice más pequeño t.q. $\tau_i < \sigma_i$ y consideramos la secuencia de $(s+1)$ números:

$(\star)$ $\qquad \tau_1 < \cdots < \tau_i < \sigma_i < \cdots \sigma_s$

Sea $\pi \in S_{s+1}$ y definimos $\pi(\tau) := (\pi(\tau_1), \dots, \pi(\tau_i), \tau_{i+1}, \dots, \tau_t)$ y $\pi(\sigma) := (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \pi(\sigma_i), \dots, \pi(\sigma_s))$. Consideramos

$$\sum_{\pi \text{ shuffle de } (\star)} \operatorname{sgn}(\pi)\, p_{\pi(\sigma)}\, p_{\pi(\tau)} \in \mathbb{F}_2[p]_2$$

coef. ± 1 homogéneo grado 2

P.D.

$$\sum_{\pi \text{ shuffle}} \operatorname{sgn}(\pi)\, \Delta_{[s], \pi(\sigma)}(X)\, \Delta_{[t], \pi(\tau)}(X) = 0 \qquad (\star\star)$$

Sea $X_{s \times n} = (x_{ij})_{i \in [s], j \in [n]}$ la submatriz rectangular de X. La suma en $(\star\star)$ es una función multilineal y alternante en las $s+1$ columnas de $X_{s\times n}$ indexadas por la secuencia $(\star)$. Las columnas de una matriz $s \times n$ con entradas en k generan un espacio vectorial de dimensión $\leq s$. Por lo tanto, si evaluamos la suma en $(\star\star)$ escogiendo valores en k para las entradas de $X_{s\times n}$, entonces es cero.

$\Rightarrow$ Las relaciones $(\star\star)$ pertenecen al ideal I_n.

Para mostrar que generan el ideal se puede usar la teoría de las bases de Gröbner, omitimos esta parte de la prueba (ver Miller-Sturmfels "Combinatorial Commutative Algebra", prueba del Teorema 14.6) $\square$

Las relaciones de Plücker también se pueden expresar de la siguiente manera: Sean $L=\{l_1<\cdots<l_s\}$ y $J=\{j_1<\cdots<j_t\}$ subconjuntos de $[n]$ con $s\le t$. Para cada $k\le t$ tenemos la relación

$$R^k_{LJ} = P_J P_L - \sum_{1\le r_1<\cdots<r_k\le s} (-1)^{sgn} P_{J'} P_{L'} \in I_n.$$

donde $J' = (J\setminus\{j_1,\dots,j_k\}) \cup \{l_{r_1}<\cdots<l_{r_k}\}$ y

$L' = (L\setminus\{l_{r_1}<\cdots<l_{r_k}\}) \cup \{j_1,\dots,j_k\}$

Nota que todos los monomios en R^k_{LJ} corresponden a un shuffle de L, J donde se cambian k elementos de L por los primeros k elementos de J.

El sgn se obtiene del número de inversiones en las seq. $(l_{r_1},\dots,l_{r_k},j_{k+1},\dots,j_t)$ y $(l_1,\dots,l_{r_1-1},j_1,l_{r_1+1},\dots)$

Ejemplo: $n=3$ los generadores de I_n del Teorema son

$p_{23}p_1 - p_{13}p_2 + p_{12}p_3 = R^1_{\{1,3\},\{2,3\}}$

$p_{24}p_1 - p_{14}p_2 + p_{12}p_4$

$p_{34}p_1 - p_{14}p_3 + p_{13}p_4$

$p_{34}p_2 - p_{24}p_3 + p_{23}p_4$

$p_{14}p_{23} - p_{13}p_{24} + p_{12}p_{34}$

$p_{234}p_1 - p_{134}p_2 + p_{124}p_3 - p_{123}p_4$

$p_{134}p_{12} - p_{124}p_{13} + p_{123}p_{14}$

$p_{234}p_{12} - p_{124}p_{23} + p_{123}p_{24}$

$p_{234}p_{13} - p_{134}p_{23} + p_{123}p_{34}$

$p_{234}p_{14} - p_{134}p_{24} + p_{124}p_{34}$

Ejercicio: en la notación $R^k_{J,L}$, ¿cuáles son las 9 relaciones restantes del ejemplo?

Tarea: Dada las relaciones de Plücker completa la prueba del Lema 1.

§ La Grassmanniana

23/02/2023

Hermann Günther Grassmann (1809 - 1877, Alemán)
"fundador" del cálculo vectorial y tensorial

Definición: Para $1 \leq d < n$ definimos la Grassmanniana $Gr_{d,n}$ como el conjunto de subespacios vectoriales U de dim. d en un espacio k-vectorial V de dim n.

Sea $U \in Gr_{d,n}$ y $\{v_1, \ldots, v_d\}$ una base de U. Podemos asociar una matriz $A = (a_{ij}) \in Mat_{d \times n}(k)$ de tal manera que la columna j contiene los coeficientes de v_j expresado en la base estándar $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V. Es decir,
$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

Supongamos que $\{v_1', \ldots, v_d'\}$ es otra base de U y A' es la matriz asociada.
$$\Rightarrow \exists\, C \in Gl_d(k) : \quad A' = CA$$

Las columnas de A y A' son linealmente indep. en V y definen el mismo subespacio U.
Podemos identificar
$$Gr_{d,n} \equiv \left(Mat_{n \times d} \setminus Z \right) / \sim$$
donde $Z = \{ B \in Mat_{n \times d} : \text{rango}(B) < d \}$
y $A \sim A' \overset{def}{\iff} \exists\, C \in Gl_d(k) : \; A' = CA$

Ejercicio: Si $d = 1$ tenemos $Gr_{1,n} \cong \mathbb{P}^{n-1}$ es el espacio proyectivo.

$\leadsto$ Las Grassmannianas generalizan los espacios proyectivos.

Definición: Sea $I_{d,n} := \{ \underline{i} = (i_1, \dots, i_d) : 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n \}$ con el orden parcial $\underline{i} \geq \underline{j} \iff i_t \geq j_t \ \forall\, t \in [d]$

Nota que $\# I_{d,n} = \binom{n}{d}$ y $I_{d,n}$ es un conjunto de índices para una base de $\Lambda^d V : \{ e_{\underline{i}} := e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} : \underline{i} \in I_{d,n} \}$

Definimos

$$\pi_d : X := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{d\text{-veces}} \longrightarrow \Lambda^d V$$
$$(v_1, \dots, v_d) \longmapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_d$$

Ejercicio: $$v_1 \wedge \dots \wedge v_d = \sum_{\underline{i} \in I_{d,n}} \Delta_{\underline{i}}(A)\, e_{\underline{i}}$$

donde A es como antes y $\Delta_{\underline{i}} = \Delta_{[d], \{i_1, \dots, i_d\}}$

Nota que $\pi_d(v_1, \dots, v_d) = 0 \iff A \in Z$.

Además, si $(v_1, \dots, v_d)$ y $(v_1', \dots, v_d')$ son tales que sus matrices A y A' son relacionados $A' = CA$, $C \in Gl_d(k)$

$$\Rightarrow \quad v_1' \wedge \dots \wedge v_d' = \det(C)\, v_1 \wedge \dots \wedge v_d$$

Lema: La aplicación
$$p : Gr_{d,n} \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^d V)$$
$$U \longmapsto \pi_d(v_1, \dots, v_d)$$

es bien definida.

Prueba: P.D. $p(U)$ no depende de la base $v_1, \dots, v_d$ de U pues si $\{v_1, \dots, v_d\}$ y $\{v_1', \dots, v_d'\}$ son dos bases tenemos

$$[v_1' \wedge \dots \wedge v_d'] = [\underbrace{\lambda (v_1 \wedge \dots \wedge v_d)}_{\lambda \in k \setminus \{0\}}] \underset{\text{en } \mathbb{P}}{=} [v_1 \wedge \dots \wedge v_d] \quad \square$$

La base estándar de $\Lambda^d V$ define coordenadas en $\mathbb{P}(\Lambda^d V)$:

$$[v_1 \wedge \dots \wedge v_d] = \sum_{\substack{\underline{i} = (i_1, \dots, i_d) \\ \in I_{d,n}}} \Delta_{\underline{i}}(A)\, [e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}]$$

$\Delta_{\underline{i}}(A) = \Delta_{[d], \underline{i}}(A)$

$\Rightarrow$ la componente $\underline{i}$ de $p(U)$ es $p_{\underline{i}}(U) = \Delta_{\underline{i}}(A)$

coordenada de Plücker

Ejercicio: Sea $\sigma \in S_d$ y $\underline{i} = (i_1, \dots, i_d) \in I_{d,n}$. Entonces

$$p_{\underline{i}} = (-1)^{inv(\sigma)} \, p_{\sigma(\underline{i})} \text{ donde } \sigma(\underline{i}) := (\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_d)).$$

La aplicación p se llama el encaje de Plücker debido al siguiente resultado:

Teorema: La aplicación de Plücker es inyectiva.

Prueba: Sean $U, U' \in Gr_{d,n}$ tales que $p(U) = p(U')$.
Entonces $\exists$ $\underline{l} = (l_1, \dots, l_d) \in I_{d,n}$: $p_{\underline{l}}(U) = p_{\underline{l}}(U') \neq 0$
y sin perder de generalidad podemos suponer que $p_{\underline{l}}(U) = 1$.
Sean A y A' matrices que representan U y U', respectivamente.

$$\Rightarrow \quad \Delta_{\underline{l}}(A) = \Delta_{\underline{l}}(A') = 1$$

Sean $\quad C = A_{l_1, \dots, l_d}^{-1} \quad$ y $\quad C' = A'^{-1}_{l_1, \dots, l_d}$

submatriz con columnas $l_1, \dots, l_d$

$$\Rightarrow (CA)_{l_1, \dots, l_d} = (C'A')_{l_1, \dots, l_d} = \mathbb{1}_d$$

$\Rightarrow$ Sin perder de generalidad supongamos $A_{l_1, \dots, l_d} = A'_{l_1, \dots, l_d} = \mathbb{1}_d$.
Entonces, para $i \in [n]$, $j \in [d]$ calculamos

$$a_{ij} = \det(A_{l_1, \dots, \hat{l}_j, \dots, l_d, i}) = p_{l_1, \dots, \hat{l}_j, \dots, l_d, i}(U)$$

omitando l_j en la secuencia

$$= p_{l_1, \dots, \hat{l}_j, \dots, l_d, i}(U') = \det A'_{l_1, \dots, \hat{l}_j, \dots, l_d, i} = a'_{ij}$$

$$\Rightarrow A = A' \Rightarrow U = U' \quad \square$$

Podemos identificar $Gr_{d,n}$ con $Im(p) \subset \mathbb{P}(\Lambda^d V)$.
En lo que sigue mostramos que el encaje es cerrado en la topología de Zariski. $\Rightarrow$ $Gr_{d,n}$ es una variedad proyectiva.

Teorema: La Grassmanniana $Gr_{d,n} \subset \mathbb{P}(\Lambda^d V)$ es el conjunto de ceros de los siguientes polinomios de grado 2:

$$\sum_{\ell=1}^{d+1} (-1)^{\ell} \, p_{i_1 \cdots i_{d-1}, j_\ell} \, p_{j_1, \dots, \hat{j_\ell}, \dots, j_{d+1}} \qquad \star$$

donde $\{i_1, \dots, i_{d-1}\} \in \binom{[n]}{d-1}$ y $\{j_1, \dots, j_{d+1}\} \in \binom{[n]}{d}$

Tarea: Verifica que $(\star)$ es un caso especial de las relaciones de Plücker $R^k_{L,J} = p_J p_L - \sum_{1 \leq r_1 < \cdots < r_k \leq s} (-1)^{sgn} p_{J'} p_{L'}$

$L = (l_1, \dots, l_s)$, $J = (j_1, \dots, j_t)$, $k \leq t \leq s$

$L' = (L \setminus \{l_{r_1}, \dots, l_{r_k}\}) \cup \{j_1, \dots, j_k\}$

$J' = (J \setminus \{j_1, \dots, j_k\}) \cup \{l_{r_1}, \dots, l_{r_k}\}$