04/11/2023

La inversa de la medida de frontera

Objetivo: demostrar el teorema 6.5 construyendo la aplicación inversa

$$Gr_{kn}^{tnn} \longrightarrow \{ \text{J-tableaux} \}$$

Preparación: Sea $A=(a_{ij})$ una $k\times n$-matriz en I-forma escalonada. Supongamos $k<n$. Sea $d+1$ el menor índice t.q. $d+1 \notin I$ entonces A_{d+1} es una combinación lineal de $A_1,\dots,A_d$

$$A_{d+1} = (-1)^{d-1} x_1 A_1 + \dots + x_{d-2}A_{d-2} - x_{d-1}A_{d-1} + x_d A_d, \quad A_i = e_i \quad i\in[d]$$

Nota que d es maximal con $[d]\subseteq I$. También $d=0$ es un posible caso si $A_1 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{d+1}x_1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & & & \vdots & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & & & & \\ & \vdots & & 1 \; 0 & -x_{d-1} & * & \cdots & * \\ & & & 0 \; 1 & x_d & * & \cdots & * \\ & & & \vdots \; 0 & 0 & & & \\ & & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \; 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

Lema 7.1 Dado A como antes tenemos

$$\Delta_{I\setminus\{i\}\cup\{d+1\}}(A) = x_i.$$

Entonces $A\in Mat_{kn}^{tnn}$ ⟶ matrices $k\times n$ de rango completo con $\Delta_J \geq 0 \ \forall J : |J|=k$

implica $x_i \geq 0 \ \forall i\in[d]$.

Prueba: Ejercicio.

Lema 7.2 Sea $r\in[d]$ tal que $x_r=0$ y supongamos que existe $i<r$ t.q. $x_i\neq 0$. Entonces, $A\in \mathrm{Mat}^{tnn}_{kn}$ implica $a_{rj}=0$ $\forall j>d$. En particular la fila r de A es cero con única excepción $a_{rr}=1$.

Tal x_r se llama un cero bloqueado.

Prueba: Para $j\in I\setminus\{r\}$ tenemos $a_{rj}=0$, entonces supongamos $j\notin I$. Tenemos

$$\Delta_{I\setminus\{r\}\cup\{j\}}(A) = (-1)^{|I\cap[r+1,j-1]|}\, a_{rj} \geq 0 \quad A\in\mathrm{Mat}^{tnn}_{kn}$$

También

$$\underbrace{\Delta_{I\setminus\{i,r\}\cup\{d+1,j\}}(A)}= (-1)^{\overbrace{|I\cap[r+1,j-1]|}^{=:t}+1}\, x_i\, a_{rj} \geq 0$$

$$= \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & d+1 & & j & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{i-1} & \vdots & 0 & & \\ 0\cdots 0 & (-1)^{d-i}x_i & & & 0 \\ & \vdots & \mathbb{1}_t & \vdots & \\ 0 & & 0\cdots 0 & a_{rj} & \\ & & 0 & \vdots & \mathbb{1} \end{bmatrix} \end{array}$$

Lema 7.1 $\Rightarrow$ $x_i>0$ $\Rightarrow$ $(-1)^{t+1}a_{rj}\geq 0$ y $(-1)^{t}a_{rj}\geq 0$ $\Rightarrow$ $a_{rj}=0$ $\square$

Lema 7.3 Supongamos que existe $r\in[d]$ t.q. $a_{rr}=1$ es la única entrada no cero de la fila r. Sea $B=(b_{ij})$ la $(k-1)\times(n-1)$ matriz obtenida de A eliminando la fila y la columna r y cambiando los signos de los a_{ij} con $i\in[r-1]$ y $j\geq d+1$. Entonces,

$$A\in \mathrm{Mat}^{tnn}_{kn} \iff B\in \mathrm{Mat}^{tnn}_{(k-1)(n-1)}. \quad \bigstar$$

Además, $\Delta_J(A)=0$ si $r\notin J$ y $\Delta_J(A)=\Delta_{\bar{J}\setminus\{r\}}(B)$ si $r\in J$ y $\bar{J}=(J\cap[r])\cup\{j-1 : j\in J\setminus[r]\}$.

Prueba: Nota que la igualdad de los menores implica ⋆, entonces nos enfocamos en la segunda afirmación.

$\Delta_J(A)=0$ si $r\notin J$ pues A_J contiene una fila de ceros en este caso. Si $r\in J$, A_J contiene una fila $(0\cdots 010\cdots 0)$

Por lo tanto, si $J=\{j_1,\dots,j_{s-1},r,j_{s+1},\dots,j_p,\underbrace{j_{p+1},\dots,j_k}_{\geq d+1}\}$

$$\Delta_J(A)=\det\begin{bmatrix} 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & a_{1j_{p+1}} & \cdots & a_{1j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & & 1 & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & & & & \\ & & & & \vdots & & 1 & & & \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & a_{kj_{p+1}} & \cdots & a_{kj_k} \end{bmatrix}$$

(columnas $j_1 \cdots j_{s-1}\ r\ j_{s+1} \cdots j_p$)

estos tienen signo opuesto en B.

$$= (-1)^{\sum_{i\in[p]}(j_i+1)} \det\left((a_{ij})_{i\in[k]\setminus\{j_1,\dots,j_p\},\, j\in J\setminus\{j_1,\dots,j_p\}}\right)$$

$$\Delta_{J\setminus\{r\}}(B) = (-1)^{\sum(j_i+1)-(r+1)} \det\left((b_{ij})_{i\in[k]\setminus\{j_1,\dots,j_p\},\, j\in J\setminus\{j_1,\dots,j_p\}}\right)$$

$a_{ij}=-b_{ij}$ si $i\in[r-1]$, $j\geq d+1$

$$= (-1)^{\sum(j_i+1)-(r+1)+\#([r-1]\setminus\{j_1,\dots,j_{s-1}\})} \det((a_{ij}))$$

$$= (-1)^{\sum(j_i+1)-(r+1)+(r-s)} \det((a_{ij}))$$

$$= (-1)^{r-s}\, \Delta_{J\setminus\{r\}}(A') \qquad \text{donde } A'=(a_{ij})_{i\in[k]\setminus\{r\},\, j\in[n]\setminus\{r\}}$$

$$= \Delta_J(A) \quad //$$

Supongamos que no existen ceros bloqueados en A, es decir $x_1=\dots=x_s=0$ y $x_{s+1},\dots,x_d>0$ para alguna $s\in[0,d]$. Definimos una matriz $k\times(n-1)$ $C=(c_{ij})$:

- la primeras d columnas de C so $e_1\cdots e_d\in\mathbb{R}^k$

- para $j = d+2, \ldots, n$ las entradas de C son

$$C_{i,j-1} = \begin{cases} a_{ij} & i \in [s] \cup [d+1, k] \\ \frac{a_{ij}}{x_i} + \frac{a_{i+1,j}}{x_{i+1}} & i \in [s+1, d-1] \\ \frac{a_{dj}}{x_d} & i = d \end{cases}$$

Lema 7.4 $A \in Mat^{tnn}_{kn} \iff C \in Mat^{tnn}_{k,n-1}$

Además, si fijamos $S^{tnn}_{\mathcal{M}} \subset Gr^{tnn}_{kn}$ con $A \in S^{tnn}_{\mathcal{M}}$ (resp. su clase) entonces $\forall J \in \binom{[n-1]}{k}$ tenemos que

$$\Delta_J(C) \in \mathbb{Q}_{sf}(\Delta_K(A) : K \in \mathcal{M})$$

expresiones racionales libre de substracciones en $\{\Delta_K(A) : K \in \mathcal{M}\}$

Al revés tenemos que

$$\Delta_K(A) \in \mathbb{Q}_{sf}\left(\Delta_J(C), x_i : J \in \binom{[n-1]}{k}, i \in [s+1, d]\right)$$

En particular, el Lema 7.4 nos da una biyección entre dos células positroide

$$\left\{ S^{tnn}_{\mathcal{M}} \subset Gr^{tnn}_{kn} : \begin{array}{l} A \in S^{tnn}_{\mathcal{M}} \\ A \text{ no tiene ceros bloqu.} \end{array} \right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{ S^{tnn}_{\mathcal{M}'} \subset Gr^{tnn}_{k,n-1} : C \in S^{tnn}_{\mathcal{M}} \text{ como arriba} \right\}$$

Ejercicio: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_1 & y \\ 0 & 1 & x_2 & z \end{pmatrix}$ con $x_1 > 0$, $x_2 > 0$

1. Calcula la matriz C
2. Calcula los menores maximales de A y C y verifica el Lema 7.4

Prueba del Teorema 6.5

Nota que $k=n$ y $k=0$ son casos triviales.
Procedemos por inducción en n y supongamos que tenemos una parametrización libre de subsitcarciones

$$\left\{ \begin{array}{l} J\text{-tableaux } T \\ \text{con } J\text{-diag. } D \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Med}_D(\mathbb{R}_{>0}^{|D|}) = S_{\mathcal{U}}^{tnn}$$

$$T \longmapsto A(N_T)$$

Además, $A(N_T)$ esté en forma escalonada para $Gr_{k'n'}^{tnn}$ $n' < n$.

Sea A una matriz $k \times n$ en forma I-escalonada que representa un punto en $S_{\mathcal{U}}^{tnn} \subset \mathcal{R}_\lambda \cap Gr_{kn}^{tn}$ con $I = I(\lambda)$.
Sean $x_1, \dots, x_d$ entradas en A según (7.1)
Dado el Lema 7.1 sabemos

- $x_i \geq 0 \quad \forall\, i \in [d]$
- d y $\{i : x_i \neq 0\}$ son determinadas por $\mathcal{U}$
  $(\Delta_{I \setminus \{i\} \cup \{d+1\}}(A) = x_i)$

Supongamos que $(x_1, \dots, x_d)$ contiene $b > 0$ casos bloqueados (i.e. $x_r = 0$ y $\exists$ $i < r$ con $x_i \neq 0$ $\xRightarrow{\text{Lema 7.2}}$ $a_{rj} = 0$ $\forall\, j \neq r$ y $a_{rr} = 1$)
Sea A' la matriz $(k-b) \times (n-b)$ obtenida de A eliminando

las columna y filas correspondientes a casos bloqueados y con los signos adaptados segun Lema 7.3.