30/01/2023

Curso: Positividad total

§2 Determinantes, sus identidades y matrices TP

§2.1 Números de inversiones

$n \in \mathbb{N}$, $[n] = \{1, \dots, n\}$

S_n grupo simétrico = grupo de permutaciones en $[n]$

$\sigma \in S_n$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$

Ej e.g. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma \rightsquigarrow 312$ "notación de una fila"

Def El número de inversiones de $\sigma \in S_n$ es $\mathrm{inv}(\sigma) = \#\{ (i,j) : 1 \leq i < j \leq n \text{ y } \sigma(i) > \sigma(j)\}$

Ej $(1,3)\ (1,2) \Rightarrow \mathrm{inv}(\sigma) = 2$

$\sigma(1) = 3 > 1 = \sigma(2)$

Def Una manera de dibujar una permutación es a través de un diagrama de cables:

Dado $\sigma \in S_n$: forma $[n]$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \sigma(1) \\ 2 & & \sigma(2) \\ \vdots & & \vdots \\ n & & \sigma(n) \end{array}$$

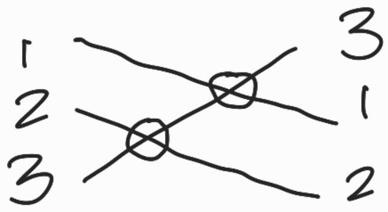
luego conectamos i con $\sigma(i)$ $\forall i \in [n]$ t.q.

(1) no hay intersecciones del cable l_i con sí mismo

(2) $\#\{ l_i \cap l_j \} \leq 1$ $i \neq j$

(3) $l_i \cap l_j \cap l_k = \emptyset$ $\forall \{i,j,k\} \in \binom{[n]}{3}$

Ej $\sigma = 312$



Ejercicio:

① Escribe los elementos de S_3 en su notación de una línea

② ¿Cuál es $\max\{\operatorname{inv}(\sigma) : \sigma \in S_3\}$?

③ para $\sigma \in S_3$ con $\operatorname{inv}(\sigma)$ maximal dibuja un diagrama de cable. ¿Es único?

S_3

321 3

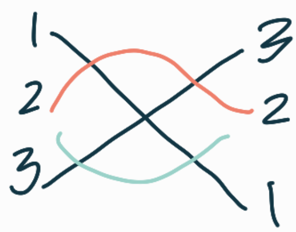
231 2

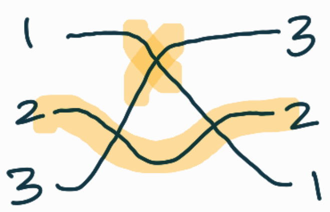
312 2

213 1

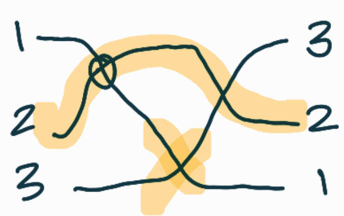
132 1

123 0





$s_2 s_1 s_2$



$s_1 s_2 s_1$

§2.2 Determinante

K campo, $M_{n,m}(K)$ = matrices $\underset{\#\text{ filas}}{n} \times \underset{\#\text{ columnas}}{m}$ con entradas en K

$\underline{n=m}$ $A=(a_{ij})_{i,j}$ $i\in[n]$, $j\in[m]$

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Ejercicio: $n=3$ $\det(A) = \overset{123}{a_{11}a_{22}a_{33}} - \overset{132}{a_{11}a_{23}a_{32}}$

$$- \overset{213}{a_{12}a_{21}a_{33}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Podemos ver $\det: \underset{\parallel}{M_n(K)} \to K$

$$A \leftrightarrow \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

es una función que cumple

(D1) multilineal:

$$\det(v_1,\dots,\lambda v_i + w, v_{i+1},\dots v_n)$$

$$= \det(v_1,\dots,v_n) + \lambda \det(v_1,\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{w}, \dots, v_n)$$

(D2) alternante: si $v_i = v_j$ para algún $i\neq j$ entonces $\det = 0$

(D3) es normalizado: $\det(\mathbb{1}_n) = 1$.

Teorema Si $f : M_n(k) \to k$ es una función multilineal, alternante

$$\Rightarrow \exists c \in k : cf = \det$$

Si además f es normalizada

$$\Rightarrow f = \det.$$

§ Extensión de Laplace

$A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(k)$ $\quad 1 \leq k \leq \min\{m, n\}$

$I \in \binom{[n]}{k}$ $\quad J \in \binom{[m]}{k}$

$$A[I \mid J] = (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$$

definimos el (I, J)-menor de A

$$\Delta_{I,J} = \det A[I \mid J]$$

$$A \in M_{4,4}(k), \quad A[\{2,3\} \mid \{2,4\}] = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{bmatrix} \end{array}$$

Una fórmula para calcular $\det(A)$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \det(\widehat{A[k \mid j]}) \cdot$$

$$\det(A[1 \ldots \hat{k} \ldots n] \mid 1 \ldots \hat{j} \ldots n])$$

Teorema (Laplace) $A \in M_n(k)$ y $k \in [n]$

$$(\star) \quad \det(A) = \sum_{J \in \binom{[n]}{k}} (-1)^{\Sigma(I) + \Sigma(J)} \det(A[I \mid J]) \cdot \det(A[I^c \mid J^c])$$

$$\Sigma(I) = \sum_{i \in I} i$$

Prueba: usar la unicidad del determinante.

Tarea: chequear que (D1) − (D3) se satisfacen para (★)

Ejercicio $A \in M_n(\mathbb{k})$, $A = \begin{bmatrix} E & F \\ 0 & G \end{bmatrix}$

$E \in M_k(\mathbb{k})$ $k < n$

entonces $\det(A) = \det(E)\det(G)$

§ Complemento de Schur

$A = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{k})$, sup. $E \in M_k(\mathbb{k})$ invertible

eliminación de Gauss para anular G

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & 0 \\ -GE^{-1} & \mathbb{1}_{n-k} \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} E & F \\ 0 & H' \end{bmatrix}}$$

$H' = -GE^{-1}F + H =: A/E$

se llama el complemento de Schur de E en A

con el Ej. det (+)

$\det(A) = \det(E)\det(A/E)$ ←

Lema 2.10 $k+1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq n$ y $k+1 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq n$

Entonces

$$\underbrace{\det H'[i_1 \cdots i_s \mid j_1 \cdots j_s]}_{s=1 \Rightarrow \text{ una entrada de } H'} = \frac{\det A[1 \cdots k\, i_1 \cdots i_s \mid 1 \cdots k\, j_1 \cdots j_s]}{\det A[1 \cdots k \mid 1 \cdots k]}$$

Prueba: La eliminación de Gauss no cambia las primeras k filas de A enteras

$$B = H'[i_1 \cdots i_s | j_1 \cdots j_s]$$

$$\det A[\underline{1 \cdots k}\, \underline{i_1 \cdots i_s} | \underline{1 \cdots k}\, \underline{j_1 \cdots j_s}] = \det \begin{bmatrix} E & * \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det(E)\det(B)$$

$\square$

Corolario:

$$h'_{ij} = \frac{\det A[1 \cdots k\, i | 1 \cdots k\, j]}{\det(E)}$$

Corolario (Sylvester) $A = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$, E invert.

definamos

$$C := \left(\det A[1 \cdots k\, i | 1 \cdots k\, j]\right)_{ij \in [k+1, n]}$$

$$\det(C) = \det(E)^{n-k-1} \det(A)$$

Prueba $C = \det(E)\, A/E$ $\quad (n-k) \times (n-k)$

$$\det(C) = \det(\det(E) \det(A/E))$$

$$= \det(E)^{n-k} \underbrace{\det(A/E)}_{\frac{\det A}{\det(E)}} = \det(E)^{n-k-1} \det(A)$$

$\square$

Ejercicio

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 6 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

calcula el complemento de Schur de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ en A.

$$H' = H - G E^{-1} F$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

La fórmula de Sylvester:

$A \in M_n(\mathbb{K})$ $\quad I, J \in \binom{[n]}{k}$ $\quad 1 \leq i, j \leq n$ t.q.

$i \notin I$, $j \notin J$ def.

$$C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \det(A[I \cup \{i\} \mid J \cup \{j\}])$$

$C \in M_{n-k}(\mathbb{K})$

$$\det(C) = \det(A[I \mid J])^{n-k-1} \det(A)$$

$n - k = 2$

Corolario (Jacobi) $\quad 1 \leq i_1 < i_2 \leq n$

$1 \leq j_1 < j_2 \leq n$

$I = [n] \setminus \{i_1, i_2\}$

$J = [n] \setminus \{j_1, j_2\}$

$c_{ij} = \det(A[I \cup i \mid J \cup j])$

entonces $C = \begin{bmatrix} c_{i_1 j_1} & c_{i_2 j_1} \\ c_{i_2 j_1} & c_{i_2 j_2} \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \det(C) = \det A[I \mid J] \det(A)$$

Ejemplo $A \in M_3(\mathbb{K})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

$I = J = \{1\}$ y $i_1 = j_1 = 2$ $\quad i_2 = j_2 = 3$

$$C = \begin{bmatrix} \Delta_{12,12}(A) & \Delta_{12,13}(A) \\ \Delta_{13,12}(A) & \Delta_{13,13}(A) \end{bmatrix}$$

Jacobi fórmula

$$\det(C) = \det(A[1|1])\det(A)$$
$$= a_{11} \cdot (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$
$$= a_{11} \cdot \Delta_{23,12}(A)$$

//

§ Cauchy - Binet

Teorema: $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ $\quad B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

Entonces

$$\det(AB) = \begin{cases} 0 & n > m \\ \det(A)\det(B) & n = m \\ \displaystyle\sum_{J \in \binom{[m]}{n}} \Delta_{[n],J}(A)\,\Delta_{J,[n]}(B) & n < m \end{cases}$$