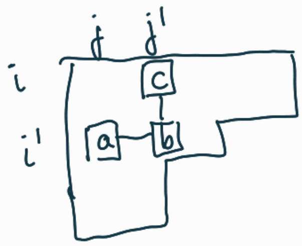
§ Diagramas ⅃

objetivo: definir objetos combinatorios que son en biyección con las células de la Grassmanniana TNN

Definición Dada una partición λ. definimos un diagrama ⅃ D en forma λ llenando el diagrama de Young $Y(\lambda)$ con 0s y 1s tal que:

$\forall$ $(i',j), (i',j'), (i,j')$ cajas en $Y(\lambda)$ con $i<i'$ y $j<j'$ con entradas a,b,c entonces

$$a,c \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$$



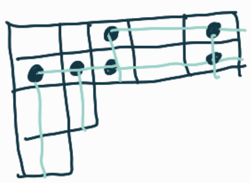
"propiedad ⅃"

Sea D un diagrama ⅃ y $|D| = \#\{1s \text{ en } D\}$. Definimos

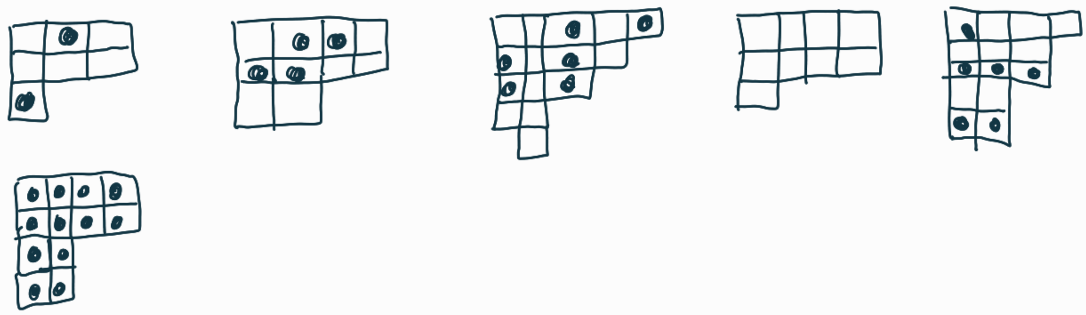
$$⅃_{kn} = \{ \text{diagramas ⅃ en forma } \lambda \subseteq k\times(n-k)\}$$

Notación: Vamos a indicar las cajas con entrada 1 con $\bullet$ y las con entrada cero vacías.
Además, agregamos líneas de cada $\bullet$ a la derecha y hacia abajo:

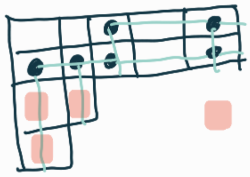
Ejemplo: Sea $\lambda = (5,5,2,1)$ entonces

$D =$  $|D| = 6$

Ejercicio: Verifica si los siguientes diagramas son ⅃:



Decimos que una entrada 0 de un diagrama ⅃ es bloqueada si hay una entrada 1 arriba en la misma columna.

Ejemplo: $D =$  ceros bloqueadas

La propiedad ⅃ se puede reformular en términos de las ceros bloqueadas:

$\forall$ cero bloqueada todas las entradas en la misma columna a su izquierda también son ceros.

Definición: Una gráfica-Γ es una gráfica plana dirigida G que satisface

(1) G está dibujada dentro de una curva cerrada frontera en $\mathbb{R}^2$.

(2) G solo contiene aristas verticales orientadas hacia abajo $\downarrow$ y aristas horizontales orientadas hacia la izquierda $\leftarrow$

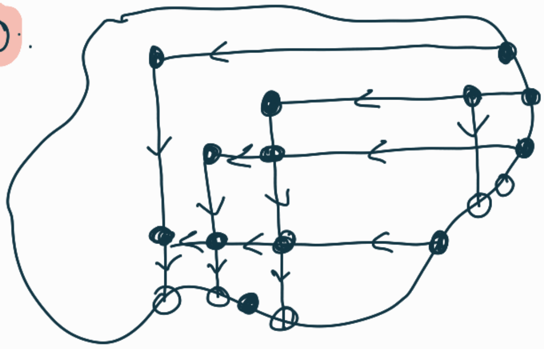
(3) Para cada vértice en el interior de la curva frontera G contiene la línea hacia abajo hasta la frontera y hacia la derecha hasta la frontera.

(4) Todas las intersecciones de las líneas en (3) son vértices de G.

(5) G puede contener vértices en la frontera que son fuentes o pozos.

$\rightsquigarrow$ una gráfica-Γ se obtiene dibujando varios "Γ" en el interior de la curva frontera.

Ejemplo.



en la frontera, los pozos son ○ y las fuentes son ●

Una red-Γ es una red con gráfica Γ.

Tarea. Verifica que para cada red-Γ existe una única transformación de gauge que transforma todos los pesos de las aristas en unos.

Vamos a asociar una Γ-gráfica a cada $\perp$-diagrama en varios pasos

Sea D un $\perp$-diagrama de forma λ

Definición: un $\perp$-tableaux T es una función

$$T : \{(i,j) \in D : (i,j) = 1\} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^{|D|}$$

Existe una correspondencia entre

$$\left\{ \begin{matrix} \perp \text{ tableaux} \\ \text{de forma} \\ \lambda \subset k \times (n-k) \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \Gamma\text{- redes con} \\ k \text{ fuentes y} \\ n-k \text{ pozos} \end{matrix} \right\} \Big/ \begin{matrix} \text{transformaciones} \\ \text{gauge} \end{matrix}$$