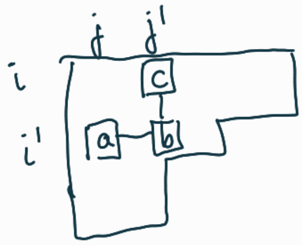
§ Diagramas ⅃

Objetivo: definir objetos combinatorios que son en biyección con las células de la Grassmanniana TNN

Definición Dada una partición λ. definimos un diagrama ⅃ D en forma λ llenando el diagrama de Young $Y(\lambda)$ con 0s y 1s tal que:
$\forall\ (i',j), (i',j'), (i,j')$ cajas en $Y(\lambda)$ con $i<i'$ y $j<j'$ con entradas a, b, c entonces

$$a, c \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$$



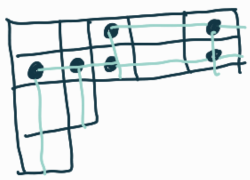
"propiedad ⅃"

Sea D un diagrama ⅃ y $|D| = \#\{1s \text{ en } D\}$. Definimos

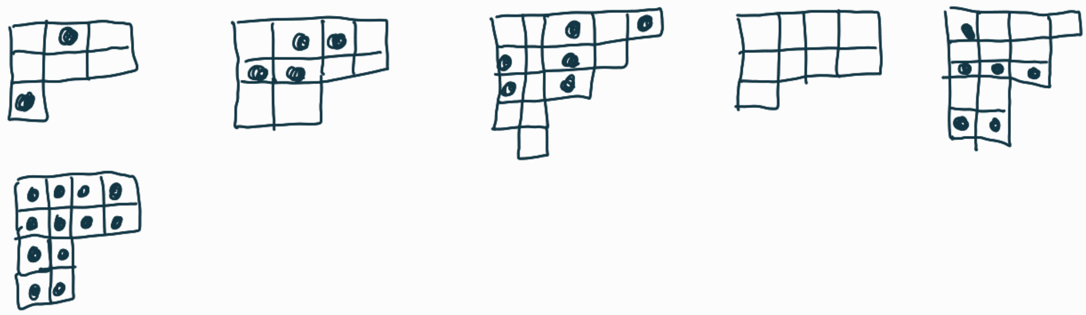
$$⅃_{kn} = \{\text{diagramas ⅃ en forma } \lambda \subseteq k\times(n-k)\}$$

Notación: Vamos a indicar las cajas con entrada 1 con ● y las con entrada cero vacías.
Además, agregamos líneas de cada ● a la derecha y hacia abajo:

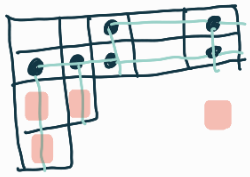
Ejemplo: Sea $\lambda = (5,5,2,1)$ entonces

$D =$  $|D| = 6$

Ejercicio: Verifica si los siguientes diagramas son ⅃:



Decimos que una entrada 0 de un diagrama $\rightharpoondown$ es bloqueada si hay una entrada 1 arriba en la misma columna.

Ejemplo: $D =$  ceros bloqueadas

La propiedad $\rightharpoondown$ se puede reformular en términos de las ceros bloqueadas:

$\forall$ cero bloqueada todas las entradas en la misma columna a su izquierda también son ceros.

Definición: Una gráfica-Γ es una gráfica plana dirigida G que satisface

(1) G está dibujada dentro de una curva cerrada frontera en $\mathbb{R}^2$.

(2) G solo contiene aristas verticales orientadas hacia abajo $\downarrow$ y aristas horizontales orientadas hacia la izquierda $\leftarrow$

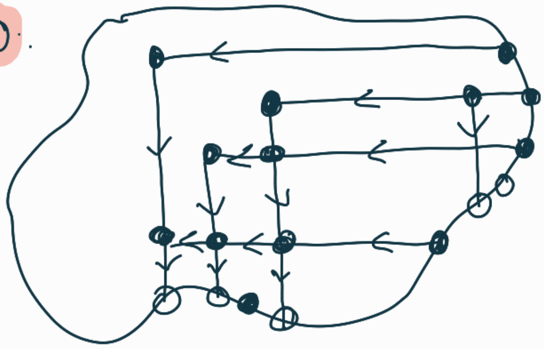
(3) Para cada vértice en el interior de la curva frontera G contiene la línea hacia abajo hasta la frontera y hacia la derecha hasta la frontera.

(4) Todas las intersecciones de las líneas en (3) son vértices de G.

(5) G puede contener vértices en la frontera que son fuentes o pozos.

$\leadsto$ una gráfica-Γ se obtiene dibujando varios "Γ" en el interior de la curva frontera.

Ejemplo.



en la frontera, los pozos son ○ y las fuentes son ●

una red-Γ es una red con gráfica Γ.

Tarea: Verifica que para cada red-Γ existe una única transformación de gauge que transforma todos los pesos de las aristas en unos.

Vamos a asociar una Γ-gráfica a cada ⅃-diagrama en varios pasos

Sea D un ⅃-diagrama de forma λ

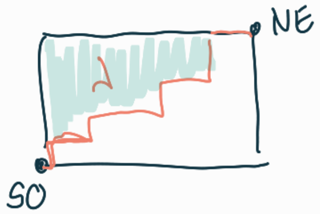
Definición: un ⅃-tableaux T es una función

$$T: \{(i,j)\in D : (i,j)=1\} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^{|D|}$$

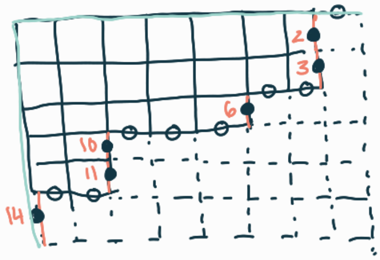
Existe una correspondencia entre

$$\left\{\begin{array}{l}\text{⅃ tableaux}\\ \text{de forma}\\ \lambda \subseteq k\times(n-k)\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\Gamma\text{-redes con}\\ k \text{ fuentes y}\\ n-k \text{ pozos}\end{array}\right\} \Big/ \text{transformaciones gauge}$$

Sea T un ⅃ tableaux de forma $\lambda \subseteq k\times(n-k)$. La frontera de λ en $k\times(n-k)$ es un camino de látiz de n pasos de la esquina NE a SO.



Vamos a agregar un vertice en medio de cada paso del camino y los marcamos $b_1, \dots, b_n$.
Recuerda que $I(\lambda)$ es el conjunto de pasos ver en el camino.
Declaramos b_i con $i \in I(\lambda)$ fuentes y b_j con $j \in \overline{I(\lambda)}$ pozos.



Agregamos un segundo camino de NE a SO de tal manera que forma una curva cerrada con el camino de lattice y que λ esté en su interior.

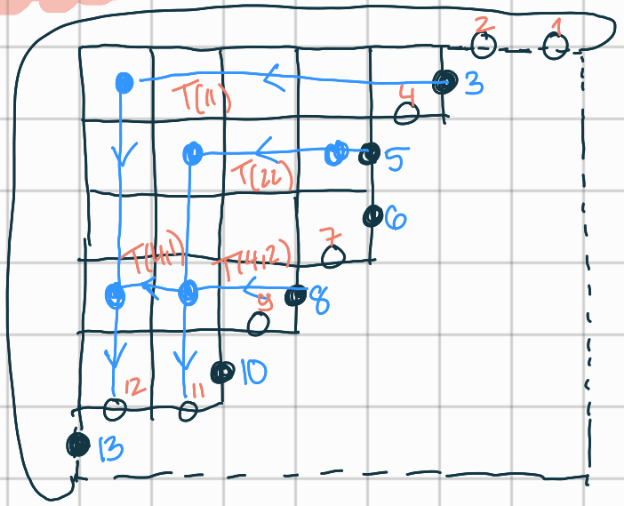
Para cada caja $(i,j) \in \lambda$ con $T(i,j) \neq 0$ agregamos un vertice en medio de la caja, y dos lineas del vertice hacia a la derecha y hacia abajo hasta que encuentre un vertice frontera b_i resp. b_j. $i \in I(\lambda), j \in \overline{I(\lambda)}$

La propiedad $\lrcorner$ implica que las intersecciones de las lineas también son vertices.
Finalmente, orientamos las aristas $\leftarrow$ y $\downarrow$ y asignamos el peso $x_e = T(i,j)$ a la arista

los demás pesos de aristas son 1.
La red obtenida se llama N_T

Ejercicio: N_T es una Γ red.

Ejemplo



$\lambda = (5,4,4,3,2) \subset 6 \times 7$

Para $D \in J_{kn}$ sea $\mathbb{R}^{D}_{>0} \cong \mathbb{R}^{|D|}_{>0}$ el conjunto de J tableaux T asociados con D. La aplicación

$$T \longmapsto N_T = (G_T, \{x_e\})$$

nos da un isomorfismo

$$\mathbb{R}^{D}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^{G_{T1}}_{>0} \Big/ \text{transformaciones gauge}$$

donde G_{T1} es el conjunto de aristas de G_T.
Definimos la aplicación de medida de frontera asociado a D:

$$\begin{aligned} Med_D : \mathbb{R}^{D}_{>0} &\longrightarrow Gr^{tnn}_{kn} \\ T &\longmapsto Med(N_T) \end{aligned}$$

Teorema 6.5

Para cada J diagrama $D \in J_{kn}$ la aplicación Med_D es una parametrización libre de subtracciones de una celula

$$S_\mu^{tnn} = Med_D(\mathbb{R}^{D}_{>0}) \subset Gr^{tnn}_{kn}$$

En particular, tenemos una biyección

$$J_{kn} \longleftrightarrow \{S_\mu^{tnn} \subset Gr^{tnn}_{kn}\}$$

Además, D es de forma $\lambda \Leftrightarrow S_\mu^{tnn} \subset \Omega_\lambda$

$\dim S_\mu^{tnn} = |D|$ y Med_D es $I(\lambda)$-polinom.

Recordamos: $f: \mathbb{R}^d_{>0} \to Su^{tnn}$ es una param. libre de substracciones si

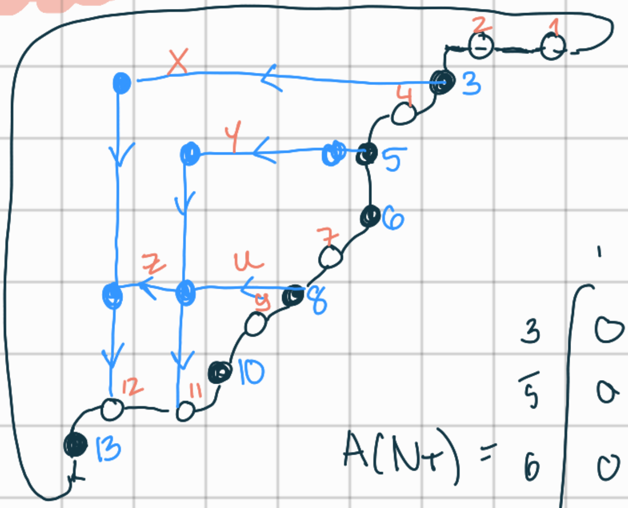
(1) $\Delta_J/\Delta_I\,(f(x_1,\dots,x_d))$ es racional libre de subs. en $x_1,\dots,x_d$

(2) para f^{-1} los x_i son racional libre de subs. en Δ_J/Δ_I

f es I-polinomial si Δ_J/Δ_I son polinomial, $I,J \in \mathcal{M}$.

Ejemplo

$\lambda = (5,4,4,3,2) \subset \overset{k}{6} \times \overset{n-k}{7}$ $\quad n = 13$



$$A(N_T) = \begin{array}{c} \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \\ 13 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & yz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & u & uz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\dim Su^{tnn} = 4 = |D|$

$\mathcal{M} = \{ I = \{3,5,6,8,10,13\},\ \{3,5,6,10,11,13\},\ \{3,5,6,10,12,13\},$
$\{3,6,8,10,11,13\},\ \{3,6,8,10,12,13\},\ \{3,6,10,11,12,13\} \}$

Recuerda que por definición de $A(N_T)$ tenemos

$$\frac{\Delta_{I \setminus \{i\} \cup \{j\}}}{\Delta_I} = M_{ij} \in \mathbb{R}_{>0}[x,y,z,u]$$

Entonces, para ver que el teorema se cumple en el Ejemplo basta calcular $\Delta_{\{3,6,10,11,12,13\}}$.

Nota que N_T nunca tiene ciclos orientados. Por lo tanto

$$\Delta_J(A(N_T)) = \sum_{P=(P_1,\dots,P_r)} x_P \in \mathbb{R}_{>0}[x_e : e \in G_T]$$

donde $\mathcal{P}$ es una colección de caminos de
$\{b_i : i \in I \setminus J\}$ a $\{b_j : j \in J \setminus I\}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta_J}{\Delta_I} \in \mathbb{R}_{>0}[x_e : e \in G_{T_1}]$$

Falta verificar

(1) Med_D es un isomorfismo

(2) Med_D^{-1} es libre de substracciones.

↳ objetivo de la siguiente sección. //