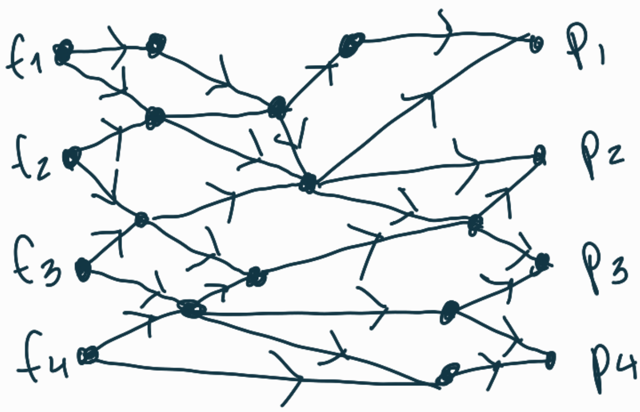
El Lema de Lindström

7/12/2023

Definición: Una **red plena de orden n** es una gráfica plena, dirigida, acíclica con $2n$ vértices distinguidos de los cuales n son fuentes y n son pozos.

Vamos a suponer que las n fuentes son $f_1, \dots, f_n$ en contra del orden del reloj y $p_1, \dots, p_n$ son los pozos en orden del reloj.

Ejemplo: Una red plena de orden 4



Convención: todas la aristas son orientadas de izquierda a derecha

Definición: Sea G una red plena de orden n. Definimos su **matriz de caminos** $W = (w_{ij})_{i,j \in [n]}$:

$$w_{ij} := \#\{\text{caminos de } f_i \text{ a } p_j \text{ en } G\}$$

Ejercicio: Determina la matriz de caminos de la red plana de orden 4 del ejemplo anterior.

$$W = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Las redes planas y sus matrices de caminos son de suma importancia en la teoría de las matrices TP / TNN por el siguiente resultado. Antes una definición:

Definición: Una familia de caminos en una red plana G se llama libre de intersecciones si ningún par de caminos en la familia comparten un vértice.

libre de intersecciones ✓

no lo es ↯

Teorema (Lema de Lindström)

Sea W la matriz de caminos de una red plana de orden n. Entonces el menor $\Delta_{I,J}(W)$ con $I,J \in \binom{[n]}{k}$, $k \leq n$ es el número de familias de caminos en G de $\{f_i : i \in I\}$ a $\{p_j : j \in J\}$ que son libres de intersecciones.

En particular, W es TNN.

Prueba: Vamos por inducción en el orden de G.

$n=1$ menores 1×1 son entradas y la afirmación se cumple por definición de la matriz de caminos W.

Supongamos que la afirmación se cumpla para órdenes $\leq n-1$ y sea G una red plana de orden n y W su matriz de caminos. Sean $I,J \in \binom{[n]}{k}$ con $k \leq n-1$. Entonces, $\Delta_{I,J}(W) = \det(W')$ donde

$$W' = (w_{ij})_{i\in I, j\in J}$$

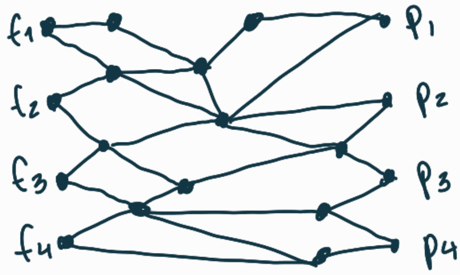
W' es la matriz de caminos de una red plana G' que se obtiene de G eliminando los vértices

$$\{f_\ell : \ell \notin I\} \cup \{p_r : r \notin J\}$$

Por lo tanto es suficiente verificar que

$$\det(W) = \#\{\text{familias de caminos de } f_1,\dots,f_n \text{ a } p_1,\dots,p_n \text{ libre de intersecciones}\}$$

Ejercicio: Para la red plana G de orden 4, ¿cuál es la red plana G' que realiza el menor $\Delta_{23,13}(W) = \det(W')$?

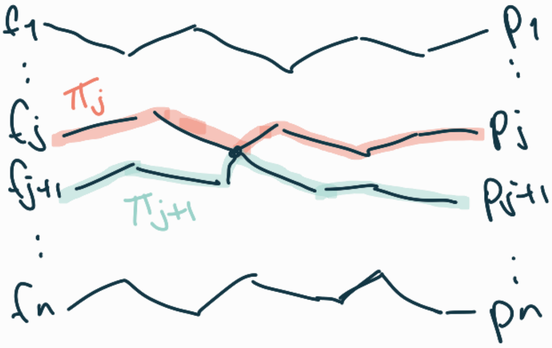


$$W' = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Continuación de la Prueba: Consideramos

$$\det(W) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{inv(\sigma)} w_{1,\sigma(1)} \cdots w_{n,\sigma(n)}$$

El primer término es $w_{11} \cdots w_{nn}$ que por definición es el producto de el número de caminos de f_i a p_i y corresponde a familias de n caminos f_i a p_i con posiblemente intersecciones. Se $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ una de tales familias donde los caminos π_j y π_{j+1} se intersectan exactamente una vez y los demás caminos no se intersectan:

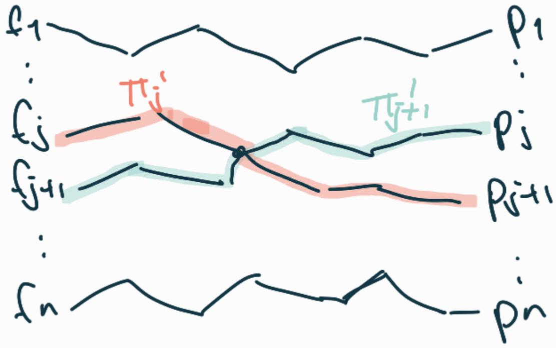


Consideramos otra familia de n caminos con las mismas aristas

$$\pi' = (\pi_1, \dots, \pi_{j-1}, \pi_j', \pi_{j+1}', \dots, \pi_n)$$

donde $\pi_j' : f_j \to p_{j+1}$ y $\pi_{j+1}' : f_{j+1} \to p_j$ se obtienen de

π_j y π_{j+1} intercambiando los caminos a partir de su intersección:



La familia π' se toma en cuenta en el término

$$\omega_{11} \cdots \omega_{j-1,j-1}\, \omega_{j,j+1}\, \omega_{j+1,j} \cdots \omega_{nn}$$

que corresponde a la permutación $\sigma = (j, j+1)$ con $inv(\sigma) = 1$.
Por lo tanto, π' se cuenta con signo -1

$\Rightarrow$ las familias π y π' se cancelan en el conteo.

Con familias de caminos en las cuales hay más que una intersección ocurre algo similar: Supongamos que $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ es una familia de caminos $f_i \to p_{\sigma(i)}$ para $\sigma \in S_n$ con k intersecciones. El conjunto de aristas de π por lo tanto forma 2^k familias de caminos: en cada punto de intersección tenemos 2 posibilidades

que aparecen con signos opuestos en el conteo.
Por otro lado, las familias de caminos que son libre de intersecciones solo aparecen una única vez en el conteo.
En particular, la matriz de caminos es TP.

$\square$

Antes de continuar una pregunta

¿Cuáles son las redes planas cuya matriz de caminos es TP?

Definición: Una red plana es totalmente conexa si para cada par de conjuntos de índices $I, J \in \binom{[n]}{k}$, $k \leq n$ existe una familia de caminos libre de intersecciones de I a J.

Ejercicio: La matriz de caminos de una red plana totalmente conexa es totalmente positiva.

Tarea: Construye una red plana para la matriz triangular inferior cuyas entradas forman el triángulo de Pascal:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & & \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & & & \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \cdots & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

y así muestra que es totalmente no negativa.

El lema de Lindström se puede generalizar de manera directa introduciendo pesos en las aristas.

Definición: Sea G una red plana de orden n cuyas aristas so ponderadas con números reales positivos.

peso cero implica que la arista se puede eliminar

La matriz de caminos ponderada de G es $W = (w_{ij})_{i,j \in [n]}$ donde

w_{ij} = suma de pesos de caminos de f_i a p_j.

Teorema: La matriz de caminos ponderada de una red plana ponderada es totalmente no negativa. Más precisamente cada menor Δ_{IJ} es la suma ponderada de familias de caminos libre de intersecciones de las fuentes f_i, $i \in I$ a los pozos p_j, $j \in J$.

El Lema de Lindström y su generalización exhiben una familia de matrices totalmente no negativas. Nuestro siguiente objetivo es mostrar que todas las matrices totalmente no negativas son matrices de caminos ponderados de redes planas.

Recuerda el Teorema de Cauchy-Binet: Sean $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ Entonces,

$$\det(AB) = \begin{cases} 0 & n > m \\ \det(A)\det(B) & n = m \\ \sum\limits_{J \in \binom{[m]}{n}} \Delta_{[n],J}(A)\Delta_{J,[n]}(B) & n < m \end{cases}$$

El siguiente corolario es útil para nosotros:

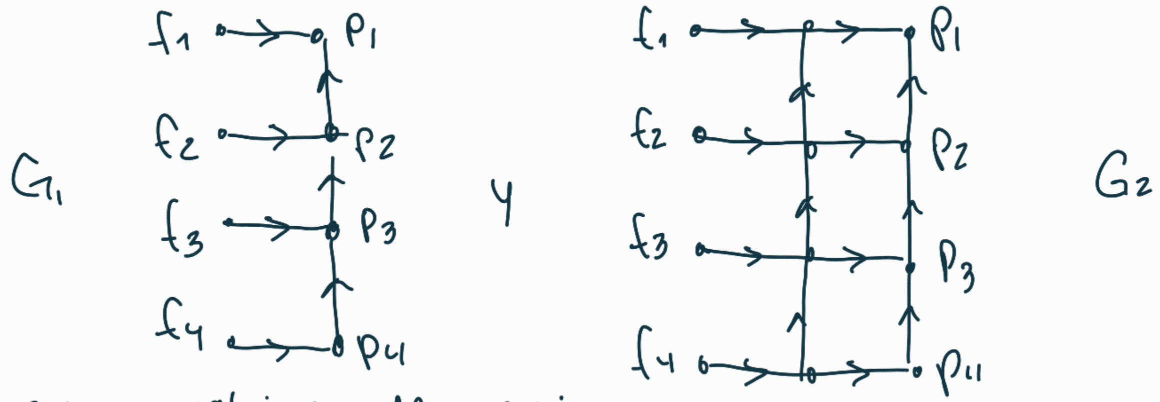
Corolario (Cauchy-Binet)
Sean $n < m$, $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,r}(\mathbb{R})$ y $s \leq \min\{n, r\}$
Para $I \in \binom{[n]}{s}$ y $J \in \binom{[r]}{s}$ tenemos

$$\Delta_{I,J}(AB) = \sum_{K \in \binom{[m]}{s}} \Delta_{I,K}(A)\Delta_{K,J}(B)$$

Prueba: Tarea.

El corolario implica, que el conjunto de matrices TNN (resp. TP) es cerrado bajo multiplicación. Si nuestras matrices son matrices de caminos, surge la pregunta de que sucede en las redes planas asociadas.

Ejemplo Consideramos dos redes planas



y sus matrices de caminos

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que $W_2 = W_1^2$ y $G_2 = G_1 \cup G_1$ la concatenación de G_1 con si mismo.

Ejercicio: muestra que la observación del ejemplo siempre se cumple.