§ Matroides

Definición: Un matroide de rango k en $[n]$ es una colección

$$\mathcal{M} \subseteq \binom{[n]}{k} \quad \text{de bases}$$

que satisfacen el axioma de intercambio:

$$\forall\, I, J \in \mathcal{M} \text{ y } i \in I \;\exists\, j \in J \text{ t.q. } (I \setminus \{i\}) \cup \{j\} \in \mathcal{M}.$$

La noción está inspirada en el cambio de base en espacios vectoriales.

Dado $U \in Gr_{k,n}$ representado por una matriz $A \in Mat_{k\times n}(\mathbb{R})$ definimos el matroide de U

$$\mathcal{M}_U := \left\{ I \in \binom{[n]}{k} : \Delta_I(A) \neq 0 \right\}$$

Equivalentemente, $I \in \mathcal{M}_U \iff \{v_i : i \in I\}$ es una base de $\mathbb{R}^k$.

columnas de A

Ejercicio: Verifica que $\mathcal{M}_U$ satisface el axioma de intercambio.
(recuerda las relaciones de Plücker)

Definimos estratos de matroides de la Grassmanniana

$$S_{\mathcal{M}} := \{ U \in Gr_{k,n} : \mathcal{M}_U = \mathcal{M} \}$$

Si $\mathcal{M}$ es un matroide de rango k en $[n]$ con $S_{\mathcal{M}} \neq \emptyset$ se llama realizable sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo:

Si
$$A = \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
define $U \in Gr_{4,10}$

entonces
$$\mathcal{M}_U = \{ 3479, 3579, 3679, 4579, 4789, 5679, \\ 3489, 3589, 3689, 4589, 5789, 5689 \}$$

Nota que si A es en I-forma escalonada entonces $I \in M_U$ es la base minimal en el orden lexicográfico. Concluimos

Lema: $\Omega_\lambda = \{ U \in Gr_{k,n} : I(\lambda) \in M_U$ es la base lex.-min. $\}$

Ejercicio: Da un ejemplo de dos matrices en $Mat_{3,6}(\mathbb{R})$ en $\{1,3,4\}$-forma escalonada con matroides distintos.

Pero al mismo tiempo tenemos:

Lema Si $U, U' \in Gr_{k,n}$ son tales que $M_U = M_{U'}$ entonces $\exists\, \lambda \in k \times (n-k)$ con $U, U' \in \Omega_\lambda$

prueba: Sean A y A' matrices en forma escalonada reducida representando U y U'. Sea $I \in M_U = M_{U'}$ el conjunto lex-min. Entonces, $U, U' \in \Omega_\lambda$ con λ t.q. $I = I(\lambda)$. $\square$

Corolario: La descomposición de $Gr_{k,n}$ en estratos de matroides es más fina que la descomposición en células de Schubert.

Observa que la descomposición de Schubert depende de un orden en la base estandar $(e_1, \dots, e_n)$. Podemos cambiar el orden con una permutación $w \in S_n$. Definimos

$$\Omega_\lambda^w := w(\Omega_\lambda)$$

Su acción en las columnas de una matriz en $Mat_{k,n}$

Es decir, $\Omega_\lambda^w \subset Gr_{k,n}$ consiste de todos U con $I(\lambda)$ base w-lex-min en M_U con respecto al orden $w(1) < w(2) < \dots < w(n)$ en $[n]$.

Teorema [Gelfand-Goresky-MacPherson-Serganova]
La descomposición de $Gr_{k,n}$ en estratos de matroids S_M es el refinamiento común de las $n!$ descomposiciones en células de Schubert $Gr_{k,n} = \bigcup_{\lambda \in k \times (n-k)} \Omega_\lambda^w$, $w \in S_n$.

Idea: Si conocemos la base w-lex-min de M_U $\forall w \in S_n$
$\Rightarrow$ conocemos todas las bases de M_U y por lo tanto conocemos el estrato de matroid de U.

Ejemplo $n=4$, $k=2$

12 13 23 14 24 34 $I(\lambda)$ lex-min

$$\Omega_{\boxplus} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{pmatrix} \right\} \ni \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A \qquad M_U = \{12, 13, 23, 24, 34\}$$

$$12 <_{lex} 13 <_{lex} 23 <_{lex} 24 <_{lex} 34$$

$w = [1342]$ $\quad 13 <^w_{lex} 12 <^w_{lex} 34 <^w_{lex} <^w_{lex} 32 <^w_{lex} 42$

$1<3<4<2$

$\Rightarrow$ 13 is $[1342]$-lex. minimal

$$\Omega^w_{\square} = w\,\Omega_{\square} = w\left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & 0 \end{pmatrix} \right\} \ni A \qquad \checkmark$$

$w = [1342]$ $\qquad e_1, e_3, e_4, e_2$ $\qquad |I(\lambda) \cap \{w(i), \ldots, w(n)\}|$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(U \cap \langle e_1, \ldots, e_2\rangle) = 2$		2
$\dim(U \cap \langle e_3, e_4, e_2\rangle) = 1$		1
$\dim(U \cap \langle e_4, e_2\rangle) = 0$		0
$\dim(U \cap \langle e_2\rangle) = 0$		0

$I(\lambda) = \{1, 3\}$

$$\Rightarrow U \in \Omega^{[1342]}_{\square}$$

$I(\lambda) = \{2,3\}$, is $w = [2314]$-minimal $\qquad |I(\lambda) \cap \{w(i), \ldots, w(n)\}|$

$\dim(U \cap \langle e_2, e_3, e_1, e_4\rangle) = 2$	2
$\dim(U \cap \langle e_3, e_1, e_4\rangle) = 1$	1
$\dim(U \cap \langle e_1, e_4\rangle) = 0$	0

$$\Rightarrow U \in \Omega^{[2314]}_{\square}$$